Dr. Andrási Tiborné vezetőtanár
Dr. Czeglédy István főiskolai tanár
Dr. Czeglédy Istvánné vezetőtanár
Dr. Hajdu Sándor főiskolai docens
Novák Lászlóné tanár
Zankó Istvánné tanár

Matematika 6.

PROGRAM

általános iskola 6. osztály
nyolcosztályos gimnázium 2. osztály

Átdolgozott kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Alkotó szerkesztő:
DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az 1. kiadást bírálta:
ELŐD ISTVÁNNÉ ny. felelős szerkesztő
DR. MAROSVÁRI MIKLÓSNÉ vezetőtanár
DR. SÜMEGI LÁSZLÓ egyetemi adjunktus

© Dr. Andrási Tiborné, Dr. Czeglédy István, Dr. Czeglédy Istvánné,
Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné, Zankó Istvánné, 1993, 2001
© Műszaki Könyvkiadó, 2001

OM-engedélyszám: XXVIII/1443-S/2000

ISBN 963 16 2820 5
Azonosító szám: CAE 040

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Bosznai Gábor
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Borítóterv: Bogdán Hajnal
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
Tördelőszerkesztés és számítógépes grafika: Köves Gabriella
Terjedelem: 7,87 (A/5) ív
3. kiadás
Nyomta és kötötte az Oláh Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Oláh Miklós

Tartalom

Bevezetés ... 4
A taneszközökről ... 5
A tananyag és a követelmények értelmezéséről ... 7
A tananyag feldolgozása ... 12
Óraterv ... 15
1. Számok és műveletek ... 16
A tananyag-feldolgozás csomópontjai ... 18
Kapcsolódási lehetőségek ... 19
Tanmenetjavaslat ... 21
A tananyag-feldolgozás áttekintése ... 25
2. A geometriai alakzatok vizsgálata ... 42
A tananyag-feldolgozás csomópontjai ... 44
Kapcsolódási lehetőségek ... 44
Tanmenetjavaslat ... 45
A tananyag-feldolgozás áttekintése ... 47
3. Függvények, egyenes és fordított arányosság, százalékszámítás ... 54
A tananyag-feldolgozás csomópontjai ... 54
Kapcsolódási lehetőségek ... 55
Tanmenetjavaslat ... 56
A tananyag-feldolgozás áttekintése ... 57
4. A tengelyes tükrözés ... 62
A geometriai transzformációkról ... 62
A tananyag-feldolgozás csomópontjai ... 64
Kapcsolódási lehetőségek ... 65
Tanmenetjavaslat ... 66
A tananyag-feldolgozás áttekintése ... 69
5. Nyitott mondatok ... 77
A tananyag-feldolgozás csomópontjai ... 78
Kapcsolódási lehetőségek ... 78
Tanmenetjavaslat ... 79
A tananyag-feldolgozás áttekintése ... 80
6. Összefoglaló ... 87
A tananyag-feldolgozás áttekintése ... 87

BEVEZETÉS

A **program** ajánlásokat tartalmaz a **NAT**, a **Kerettanterv** és a **helyi tanterv** értelmezéséhez, konkretizálásához, általában a nevelő-oktató tevékenység feladatainak megoldásához, de nem vállalkozhat arra, hogy minden osztály számára egyaránt érvényes és mindenkinek egyaránt elfogadható recepteket fogalmazzon meg. Segítséget nyújthat az adott tananyag feldolgozásában, a megfelelő módszerek kiválasztásában, a tanulók értékelésében. Ugyanakkor *a tananyag tartalmának végleges meghatározása, az egyes gyerekekkel szemben támasztott követelmények megfogalmazása, az osztály színvonalának megfelelő tárgyalásmód kidolgozása a tanár joga és kötelessége*.

A tananyag és a követelmények értelmezéséről című részben *tantervi témák* szerint elemezzük a tananyagot, taglaljuk kapcsolódását a korábbi évek követelményeihez, ismertetjük a nevelésben betöltött funkcióját.

A tananyag feldolgozása című fejezetben *a tankönyv hat fejezetét követve fejtjük ki a tananyagot*. A tankönyv felépítését tételesen áttekintve módszertani és szakmai ajánlásokat fogalmazunk meg a konkrét tananyag tanításához és a feladatok megoldásához. Áttekintjük, hogy a különböző összetételű osztályokban mire építhetünk, hová kell eljutnunk, hogyan differenciálhatunk, milyen lehetőségeink vannak a koncentrációra.

Minden témakörnél részletes, de „félkész” *tanmenetjavaslat* található. Ez a tanmenetjavaslat az aktuális tananyagon túlmenően tartalmazza a koncentráció és a folyamatos ismétlés lehetőségeit, néhány esetben utal az alkalmazható eszközökre és az esetleges kiegészítő anyagrészekre. A tanmenetjavaslatot adaptálnunk kell saját elképzeléseinkhez és osztályunk színvonalához – betartva a Kerettanterv és a helyi tanterv előírásait.

Ha a tanulók az alsó tagozatban nem ebből a tankönyvcsaládból tanulták a matematikát, akkor a felső tagozatba való átmenet koncepcióváltásának negatív hatását még 6. osztályban is érzékelhetjük. Több időt és energiát kell fordítanunk a számfogalom alapozására, a mértékegységek megtanítására, a számolási rutin, a szövegértelmező képesség és a geometriai látásmód fejlesztésére.

A Kerettanterv minimálisan heti 3 matematikaórát ír elő úgy, hogy közben nem csökkenti lényegesen (mert nem is lehet csökkenteni) a követelményeket. Ebben az órakeretben nem dolgozható fel és nem gyakorolható be kellő színvonalon a tananyag. Ezért **az iskolák döntő többsége a szabadon tervezhető órakeretből heti plusz egy órát biztosít a matematikatanítás számára.** Ezt a taneszközök kidolgozásánál figyelembe kellett vennünk.

A taneszközökről

Matematika 1–8. Mintatanterv

A Kerettanterv követelményrendszerét figyelembe véve 1. osztálytól 8. osztályig egységes koncepció szerint felépített és évekre bontott tantervi minta.

A szerzők figyelembe vették matematikatanításunk hagyományait, törekvéseit, a különböző körülmények között dolgozó iskolák lehetőségeit és igényeit, a hatosztályos gimnáziumok felvételi követelményeit, a társtantárgyak tanterveit, valamint több európai ország tanterveit és tankönyveit.

A Kerettanterv csupán a tananyag *közös magját*, mintegy 80%-át tartalmazza, amelyet mindenki számára tanítanunk kell. Az osztály képességének és a matematikai tartalom egymásra épülésének figyelembevételével, a helyi tanterv alapján a szaktanár döntheti el, hogy melyik tanulócsoportnak hogyan egészíti ki és teszi teljessé a tananyagot.

A Kerettanterv által előírt tananyag nem alkot didaktikailag és logikailag hézagmentes rendszert, a hiányosságokat (még minimumszinten is) pótolnunk kell.

A mintatanterv könyv formájában, illetve lemezen egyaránt térítésmentesen kapható a **Műszaki Könyvkiadóban**.

Matematika 6. A tankönyv (alapszint)

Csak a kerettantervi minimumot, a heti 3 matematikaórában dolgozó osztályok számára javasolt **redukált tananyagot tartalmazza**. Ennek a változatnak a segítségével nem készíthetjük fel tanulóinkat a sikeres középiskolai tanulmányokra.

Matematika 6. B tankönyv (bővített változat)

A tankönyv tartalmilag és mélységében is „széles sávban” dolgozza fel a tananyagot. A szerzők felkészültek a különböző helyi tantervek igényeinek kielégítésére, beleértve a hátrányos körülmények között tanulók felzárkóztatását, illetve a tagozatos vagy a nyolcosztályos gimnáziumi osztályokba járó tanulók emelt szintű képzését is. Ezért a tankönyv egyes fejezetei bővebben, mélyebben és magasabb szinten tárgyalják a tananyagot, mint ahogyan azt föltétlenül kellene. Az előzőkből következik, hogy a tankönyv többet tartalmaz, mint amit egy átlagos általános iskolai osztályban meg lehet tanítani.

A fentiek miatt a program a következő lehetőségek megfontolását javasolja:

> Bár a tankönyv tartalmazza az anyagrészt, de az osztály képességeinek figyelembevételével az egészet vagy egyes részeit hagyjuk el, illetve csak a tehetséges tanulókkal dolgoztassuk fel. A differenciálásra, szelektálásra a programban a tananyag feldolgozásánál, illetve a tanmenetben javaslatot teszünk (például a számelmélet, az egyenletek vagy a húrtrapéz tárgyalásánál).
>
> A részleteket kevésbé mélyen, elágazóan tárgyaljuk, mint a könyv. A programban felhívjuk a figyelmet arra, hogy egyes részeket (például a számelméleti vagy geometriai bizonyításokat) csak jó képességű osztályban célszerű feldolgozni.

Az egyéni munkát a tanulók képességei szerinti differenciálással szervezzük meg. A tehetséges, gyorsan dolgozó tanulóink kapják a nehéz, munkaigényes feladatokat, például a **Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény** feladatait. A matematikával nehezebben boldoguló diákjainknak inkább egyszerűbb, gyakorló jellegű feladatokat adjunk, például a **Matematika 6. Gyakorlóból**.

Vigyázzunk arra, hogy csak olyan anyagrészeket hagyjunk el, amelyeket teljes egészében tartalmaz a 7. osztályos tankönyv.

Matematika 6. Gyakorló

A számolási rutin és a biztos eszköztudás kialakításához, a tanultak felelevenítéséhez, begyakorlásához, a hiányok pótlásához tartalmaz feladatsorokat, amelyekkel biztosítható a követelmények teljesítése.

Az első nyolc fejezete lényegében megegyezik a korábbi kiadásokkal. 9. fejezete olyan **vegyes feladatokat** tartalmaz, amelyek egyrészt kapcsolódnak a Kerettantervben, illetve a tankönyvben hangsúlyosabbá vált témakörökhöz (például arány, statisztika, valószínűség), másrészt előmozdíthatják a leszakadók felzárkóztatását.

Az utolsó fejezete olyan *témazáró feladatsorokat* és hozzájuk kapcsolódó javítási és pontozási útmutatókat tartalmaz, amelyekkel a gyermek önállóan is képes értékelni a tudását. A témazáró feladatsorok a teljes hatodikos követelményrendszert felölelik.

Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény

Ez a feladatgyűjtemény nagy segítséget nyújthat a hatosztályos középiskolába készülők számára, illetve tehetséges tanulóink képességeinek fejlesztésében.

Matematika 6. tankönyv feladatainak megoldása

A feladatok megoldását tartalmazza, esetenként a gyermek számára is érthető útmutatásokkal együtt. Elsősorban a tanulók munkájának önellenőrzését segítheti.

Témazáró felmérő feladatsorok, matematika 6. osztály

A mintatantervben, illetve a programban megfogalmazott követelményeket ezekkel a feladatsorokkal *konkretizálják, operacionalizálják* és *hierarchizálják* a szerzők. A felmérő feladatsorokkal azt is szeretnénk elérni, hogy **a sokféle helyi tanterv ellenére viszonylag egységes követelményrendszer alakuljon ki az iskolákban**.

A *tanulói példányok* **A** és **B** változatban tartalmazzák a feladatsorokat. Olcsóbb kivitelben, külön-külön füzetben jelent meg a **C** és a **D** változat. A szerzők mindegyik változatban külön feladatokat dolgoztak ki az *emelt szint* számára.

A **C** és a **D** változatot csak az iskolák rendelhetik meg.

A *tanári példányokban* megtalálhatók a javítási útmutatók és az értékelési normák is.

A TANANYAG ÉS A KÖVETELMÉNYEK ÉRTELMEZÉSÉRŐL

Ajánlás a helyi tanterv követelményrendszerének kidolgozásához

A *halmazok,* a *logika* és a *kombinatorika,* valamint a *statisztika* témakörökhöz nem kapcsolódik önálló tankönyvi fejezet. Ezeket az anyagrészeket más anyagrészekkel „összeszőve" dolgozzuk fel. Az ezzel kapcsolatos oktatási-nevelési feladatokat úgy kell megoldanunk, hogy közben az aktuális tananyag tanítására helyezzük a hangsúlyt. Ezért nagyon fontos, hogy egész évre előre megtervezzük ezeknek az anyagrészeknek a tanítását.

A hatodik osztályos *év eleji követelmények* lényegében azonosak az ötödik osztályos év végi követelményekkel. Természetesen ezeket a követelmélnyeket az év eleji ismétlés során, az adott pedagógiai helyzetnek megfelelően át kell értékelnünk. *Például*:

- figyelembe kell vennünk a szünidő miatti felejtést;
- redukálnunk kell a követelményeket, ha valamilyen oknál fogva nem tudtunk kellően begyakoroltatni egyes ötödik osztályos anyagrészeket;
- nagyobb súlyt kell fektetnünk azokra az anyagrészekre, amelyek nélkül a hatodik osztályos tananyag feldolgozását nem oldhatjuk meg eredményesen.

Az egyes tantervi témakörökhöz tartozó (év végi) követelményeket a **Mintatanterv** tartalmazza. Beépítettük a korábbi évfolyamok azon követelményeit is, amelyek megalapozzák a hatodikos követelményrendszert, illetve amelyek hatodik osztályban is érvényesek. Természetesen figyelembe vettük az újonnan tanultakat és azt, hogy a tanulók képességei fejlettebbek, tudásuk bővebb, mint negyedik, ötödik osztályban volt.

A követelmények konkretizálásához tudnunk kell, hogy milyen feladatok megoldását várhatjuk el a gyermektől **alapszinten** (vagyis az általános iskolában), illetve **emelt szinten** (például a nyolcosztályos gimnáziumi tagozat szintjén). Célszerű megkülönböztetnünk a továbbhaladáshoz nélkülözhetetlen **minimumkövetelményeket**.

Természetesen figyelembe kell vennünk a konkrét osztály fejlettségi szintjét és a helyi tanterv előírásait. Ha heti 3 óránk van a matematika tananyag feldolgozására, és nincs lehetőségünk folyamatos korrepetálásra, illetve tehetséggondozásra, akkor a korábban megszokott követelményszinthez képest lejjebb kell szállnunk.

Azt is látnunk kell, hogy ebben az esetben tanulóink tudása reménytelenül el fog maradni azoknak a gyerekeknek a tudásától, akik heti 4 órában tanulják a matematikát.

Halmazok, logika, kombinatorika

A *halmaz, logika* témakör ugyan 6. osztályban sem jelenik meg önálló fejezetként a tankönyvben és a javasolt tanmenetben, de eszközként, szemléletként behálózza a teljes matematikatanítást. Ide tartozik bármely témakörben

konkrét dolgok, számok, sokszögek stb. adott szempont szerinti rendszerezése, rendezése;

a legegyszerűbb logikai kapcsolatok, műveletek értelmezése és áttekintése;

a tanultakhoz kapcsolódó egyszerű állítások, következtetések megfogalmazása;

a tanultakhoz kapcsolódó egyszerű állítások igazságának eldöntése;

a nyelv logikai elemeinek helyes használata matematikai és nem matematikai tartalmú állítások értelmezésében, megfogalmazásában, a mennyiségek viszonyításában, halmazok megadása és összehasonlítása során.

A helyi tanterv szerkesztésekor dönthetünk úgy is, hogy jobb csoportban *tudatosítjuk a halmazokról tanultakat*. Erre 2-3 órát kell szánnunk például az év eleji ismétlés során vagy az év végi ismétlés első óráiban.

Fontos az előző évfolyamokban tanult halmazalgebrai és logikai fogalmak eszközszerű alkalmazása az ismeretek feltárására, rendszerezésére. Ezért azt javasoljuk, hogy 6. osztályban is tekintsük érvényesnek az 5. osztályos program erre vonatkozó követelményeit. A tankönyv legtöbb fejezetében találhatók olyan feladatok, amelyek a tanulási folyamat minden szakaszában igénylik, erősítik, fejlesztik az e témakörben eddig tanultakat.

Gondot okozhat, ha a halmaz fogalmát a halmazábrával azonosítja a tanuló. Ezért jelenítsünk meg halmazokat (például részhalmazok közti összefüggéseket) számegyenesen, táblázatban stb. is.

A korábbi követelményeken kívül a 6. osztályos tanulóktól az általános iskolában is elvárhatjuk, hogy a *„ha ..., akkor ...”* és ezzel logikailag ekvivalens kifejezésekkel állításokat tudjanak megfogalmazni (véges és egyszerűbb végtelen halmaz esetén), tudják az ilyen állítások igazságát eldönteni.

Esetleg *emelt szinten*, konkrét feladatokon vizsgálhatjuk a „ha ..., akkor ...” típusú állítások megfordíthatóságát.

Használhatjuk a *„pontosan akkor ..., ha ...”* kifejezést is, de azt javasoljuk, hogy ez még emelt szinten se legyen követelmény.

A *kombinatorika* témakörből sincs önálló fejezet a tankönyvben. Sem tananyagban, sem követelményben nem lépünk túl az 5. osztályos elvárásokon. Ennek egyik oka az, hogy a *számtan, algebra* és a *geometria, mérések* témakör igen sok lehetőséget biztosít a kombinatorikus szemlélet fejlesztésére is.

Az egyes fejezetek ismeretében konkrétan is megfogalmazzuk a kapcsolódási lehetőségeket, így a követelmények értelmezése nem okoz nehézséget. Fontos, hogy a tanulók tudják az adatokat rendszeresen változtatni, a lehetőségeket megtalálni, a lehetséges eseteket sorozatba, táblázatba rendezni, diagrammal, gráffal szemléltetni. Tudják a kombinatorikai eljárásokat a hatodik osztályos tananyag egyéb témaköreiben alkalmazni.

Számtan, algebra

Annak ellenére, hogy már 5. osztályban is találkoznak a gyerekek a *racionális* szám kifejezéssel, a fogalom biztos értése még 6. osztályban sem várható el. Hiszen akkor tisztázni kellene a szakaszos tizedestört kifejezését törtalakban, továbbá az irracionális szám és a valós szám fogalmát is. Ezért megelégszünk azzal, hogy a *racionális szám* „passzív szókincsként" szerepel, értelmezéséhez fokozatos számkörbővítéssel jutunk el. Bővítjük a racionális számkört egymilliónál nagyobb és egymilliomodnál kisebb helyiértékekre.

Elképzelésünk szerint a *hatvány* fogalma 7. osztályban válik követelménnyé, de javasoljuk, hogy a helyiértékek felírása során, illetve a számok törzstényezőkre bontásakor használjuk a *természetes szám kitevőjű hatványt*. Így a tanulók fokozatosan hozzászoknak a jelöléshez és az elnevezésekhez.

A *racionális számkörön belül* foglalkozunk a **négy alapművelettel**, most már azokkal is, amelyek új értelmezést igényelnek (negatív számmal, törtszámmal való szorzás, osztás). *A matematika tanulásának alapja most is a számtan, algebra témakör.* Az az eddigi tapasztalat, hogy akit 6. osztályban nem sikerül ezen a területen eljuttatni a begyakorlottság szintjére, az 7. és 8. osztályban behozhatatlanul lemarad társaitól.

A racionális számkörön belül a négy alapművelet megtanítására 22–26 órát javasolunk, de az eredményességért valamennyi fejezetben alkalmat lehet és kell biztosítani ahhoz, hogy ez a tananyag beépüljön a tanulók eddigi tudásába, szemléletébe, műveltségébe. A beépülésre, összeszövésre minden fejezet tárgyalása elején adunk ötletet, tanácsot.

Ne az legyen az egyetlen célunk, hogy hosszú és fáradságos úton kialakítsuk a racionális számokkal végzett műveleti algoritmusokat. Arra például nincs szükség, hogy az írásbeli szorzást, osztást öt-hatjegyű számokkal gyakoroltassuk, de arra igen, hogy például egy szám 32,456-szereséről tudja a tanuló, hogy az a szám 32 456-szorosának az ezredrésze. A zsebszámológépek fokozatos alkalmazása felment a sokjegyű számokkal végzett műveletek gyakorlása alól, de *a matematika és a számítástechnika továbbra is igényli a pontosságra, kitartásra, figyelemösszpontosításra szoktatást*.

Az elmondottak miatt nem csökken, hanem inkább nő a *fejszámolás* jelentősége. Nemcsak az óra eleji folyamatos gyakorláskor kerül rá sor, de szinte minden feladat eredményének becslése (hozzávetőleges kiszámítása) szükségessé teszi.

A **százalékszámítást** a tankönyv (a 3. fejezetben) a Kerettantervvel összhangban teljes egészében feldolgozza, ugyanakkor a tanításban nem föltétlenül kell teljességre törekednünk, hiszen erre a témakörre a következő években ismételten vissza kell térnünk. Ha az osztály egyéb, alapvető anyagrészekkel nehezebben boldogul, akkor a helyi tanterv kidolgozásakor, a társtantárgyak igényeit is figyelembe véve, *redukálhatjuk a követelményeinket*.

Egy átlagos vagy az átlagosnál gyengébb általános iskolai osztályban a **számelméletet** sem tudjuk olyan igényesen feldolgozni, mint ahogyan azt a tankönyv teszi.

A **egyenletek, egyenlőtlenségek** témakört az 5. fejezet tartalmazza. Egyszerű egyenletek megoldása a Kerettanterv előírása szerint *minimumkövetelmény*. Osztályunk képességeinek ismeretében *egész évben készítsük elő* ennek a témakörnek a feldolgozását. Minden anyagrészhez kapcsolódva gyakoroltassuk a korábban tanultakat: nyitott

mondat, egyenlet, egyenlőtlenség fogalma, nyitott mondat igazsághalmazának megkeresése tervszerű próbálgatással, egyszerű egyenletek megoldása következtetéssel a műveletek komponenseinek összefüggése alapján.

Ebben a témakörben a feladatok megválogatásával differenciálhatunk.

A követelmények taglalása során visszanyúlunk a korábbi évek bizonyos követelményeihez, amelyek még most sem vesztették el aktualitásukat. Például a *szövegértelmezés* képességének a fejlesztése céljából 6. osztályban is gyakoroltatnunk kell és meg kell követelnünk az egyszerű szöveges feladatok megoldását is.

Relációk, függvények

A témakör gerince *az egyenes és a fordított arányosság.* A program által ajánlott követelmények lényegében csak ezekre a kapcsolatokra szorítkoznak. Ugyanakkor a relációkra, a grafikonokra, a függvényekre és a sorozatokra vonatkozó 5. osztályos követelmények nyilván 6. osztályban is érvényesek. (Ezekkel részletesen az ötödik osztályos program foglalkozik.) A tankönyv minden egyéb témakör feldolgozása során eszközjelleggel alkalmazza ezeket az ismereteket (lásd az egyes fejezetek tárgyalásánál a koncentráció lehetőségeinek elemzését).

A függvényfogalom előkészítése során ne csak szám-szám függvénnyel találkozzanak a gyerekek. Ezért fontos például a sokszögek vizsgálata ilyen szempontok szerint is. Egy fogalom kialakításához az ellenpéldák megismerése is szükséges. Ezért javasoljuk, hogy nem egyértelmű megfeleltetésekkel is foglalkozzunk (például a természetes számok osztói).

Hatodik osztályban az egyenes és a fordított arányosság részletes kimunkálása, hangsúlyozása szükséges mind a matematika többi témaköre, mind az egyéb tantárgyak (földrajz, technika, fizika stb.) igényei miatt.

Javasoljuk, hogy a függvényfogalom életkornak megfelelő szintű értelmezésére csak hetedik osztályban kerüljön sor. *Hatodikban a függvénnyel kapcsolatos fogalomrendszert előkészíthetjük, de nem tudatosítjuk, az elnevezéseket nem vezetjük be.* Most egy-egy feladat megoldásának részletes megbeszélésekor hangsúlyozzuk a hozzárendelés egyértelműségét, a két változó megkülönböztetett szerepét, a két változó érvényességi körét (de az „értelmezési tartomány", „értékkészlet" kifejezést még ne használjuk).

Az egyenes és a fordított arányossággal a tankönyv 3. fejezete foglalkozik, ezért a konkrét módszertani ajánlásokat ott fogalmazzuk meg.

Geometria

A két geometria fejezet tárgyalása sokféle tevékenységet igényel, még akkor is, ha alsó tagozatban és 5. osztályban már végeztek ilyeneket. A gyerekek térszemlélete, geometria-szemlélete ebben a korban sokat fejlődik, de gyerekenként igen eltérően. Nem biztos, hogy az előző években mindenkiben kialakult a tér- és a síkbeli alakzatok előállításakor az a megfigyelőképesség és tapasztalat, amelyre a 6. osztályos ismeretet lehet építeni.

Testek ábrázolása, építése, síkidomok előállítása során formákat, helyzeteket, méreteket tanulnak egyeztetni. Új tulajdonságokat ismernek meg, s ezekkel az új tulajdonsá-

gokkal definiálni fogják a létrehozott alakzatokat, felhasználják ezeket szerkesztésekben, bizonyításokban.

A tengelyesen szimmetrikus alakzatokkal foglalkozva (jobb csoportban) célszerű tisztázni a **húrtrapéz** fogalmát, de részletes tárgyalását csak emelt szinten javasoljuk. (Hetedik osztályban a paralelogrammáról tanultakat és a középpontos szimmetriát alkalmazva határozzuk meg a trapéz területét, fogalmazzuk meg az általános összefüggést.)

A fogalomrendszer kizárólagosan *deduktív felépítése* nem felel meg ennek a korosztálynak. Ennek ellenére ebben a témakörben már célszerű egyes összefüggéseket nemcsak felismertetni, hanem a gyermek szintjén **bizonyíttatni** is. A tankönyvben több olyan mintapéldát találunk, amelyet feldolgozva kialakíthatjuk jobb képességű tanulóinkban a *bizonyítási igényt*, illetve fejleszthetjük a *logikus gondolkodást, a problémameglató és -megoldó képességet*. Az osztály színvonalához igazodva gondoljuk meg, hogy mennyit és milyen mélységben dolgozunk fel ezekből a részekből. Egy átlagos képességű osztályban túlzsúfolttá tenné a tananyagot, és túlzottan megterhelnénk tanulóinkat, ha a teljességre törekednénk. Ugyanakkor didaktikai hibának tekinthetjük, ha a gyermek a 6. osztályban egyáltalán nem találkozik bizonyításokkal.

Valószínűség, statisztika

Valószínűségi kísérletek végzésekor szerezzenek tapasztalatot a tanulók azzal kapcsolatosan, hogy mikor biztos, mikor lehetséges és mikor lehetetlen egy-egy esemény bekövetkezése.

Tudják értelmezni törtalakban, tizedestört alakban, százalékban egy-egy esemény relatív gyakoriságát. A valószínűségszámítással a 3. fejezet egyik alfejezete foglalkozik.

A statisztikával nem foglalkozunk külön fejezetben, hanem a számtan, algebra, illetve a függvények tananyaghoz kapcsolódóan adunk fel statisztikai vizsgálatokat igénylő feladatokat. Törekedjünk arra, hogy a tanulók a gyűjtött vagy táblázatban adott adatokat tudják elemezni, és tudjanak velük grafikont, diagramot készíteni. Tudjanak grafikonról, kördiagramról adatokat leolvasni, az összefüggéseket elemezni.

Tudják meghatározni több szám számtani közepét, tudják ezt felhasználni következtetések levonására.

A TANANYAG FELDOLGOZÁSA

Az ötödik osztályos programhoz hasonlóan ebben a részben *a tankönyv fejezeteit követve* foglalkozunk a tananyaggal kapcsolatos szakmai és módszertani kérdésekkel. Minden fejezetet először globálisan áttekintünk.

A különböző előképzettségű és képességű osztályokban nem egyforma színvonalon dolgozhattuk fel az ötödik osztályos tananyagot. Ezért (a helyi tantervvel összhangban) el kell döntenünk a következőket:

milyen alapossággal ismételjük át a korábban tanultakat,

„honnan indítsuk" a hatodik osztályos tananyag feldolgozását,

milyen mélységben és terjedelemben foglalkozzunk az új anyagrészekkel,

melyek azok az anyagrészek, amelyeket (a gyerekek adottságai vagy a helyi tanterv ajánlásai miatt) csak hetedik osztályban akarunk megtanítani, vagy tudunk begyakoroltatni.

A tankönyv nemcsak az *általános iskolai törzsanyagot* tartalmazza, hanem az *emelt szinten* feldolgozható anyagrészeket, feladatokat is. Vagyis a halmozottan hátrányos környezetben élő gyermekek és például a nyolcosztályos gimnáziumi tagozat tanulói egyaránt tanulhatnak ebből a könyvből. A különböző színvonalú osztályokhoz a tankönyv úgy próbál igazodni, hogy „szélesebb sávban" és mélyebben tárgyalja a tananyagot, mint ahogy azt egy-egy osztályban fel lehet dolgozni.

A **Matematika 6. Gyakorló** feladatsorai, bár a 6. osztályos tankönyvhöz kapcsolódnak, önálló didaktikai rendszer szerint épülnek fel. Ez a megoldás elsősorban a folyamatos ismétlés és gyakorlás megszervezésekor lehet hasznos, igen hatékonyan támogathatja a korrepetálást, de segítséget nyújthat a tananyag egyéni elképzelés szerinti felépítéséhez is. E feladatsorok általában a törzsanyag legfontosabb részeit „fedik le".

A tananyag kiválasztásának (variálásának és szelektálásának) szempontjaival az egyes fejezetek bevezető részében foglalkozunk.

Ezekben a bevezető részekben elemezzük a koncentráció lehetőségeit, a javasolt módszereket és eszközöket.

A fejezetenkénti „félkész" tanmenetjavaslatot adaptálnunk kell:

Gondoljuk végig, hogy az elmúlt évben mennyire sikerült megalapoznunk a tanítandó anyagrészt, milyen mélységben és hány órán keresztül foglalkozzunk a korábban tanultakkal.

Döntsük el, hogy megfelel-e elképzeléseinknek a tankönyv által javasolt sorrend. Van-e olyan anyagrész, amelyet más témakörhöz kapcsolva kívánunk tanítani, mint ahogyan a tankönyv javasolja? Szükségesnek tartjuk-e egyes anyagrészek kibővítését, illetve egyszerűsítését? Miképpen használhatjuk ki a koncentráció lehetőségeit? Foglalkozhatunk-e kiegészítő anyagrészekkel?

Tervezzük meg a tananyag-feldolgozás eszközszükségletét (tanulói eszközök, tanári demonstráció, transzparensek, táblázatok, videók, számítógépes programok, szakköri füzetek stb.).

Gondoljuk végig, hogy mennyi idő kellene és mennyi idő jut az egyes részek tanításához.

A szükségletnek megfelelően tervezzük meg a folyamatos ismétlést, a felzárkóztatást és a tehetséggondozást.

Válasszuk ki a feladatokat; ehhez általánosan érvényes receptet nem lehet adni. Ezért a tanmenetjavaslat elsősorban a koncentráció jelzésére tartalmazza a feladatok sorszámát.

A tankönyv egy lehetséges, a gyakorlatban bevált didaktikai elképzelés szerint rendszerezi a feladatokat. A lapszélen jelöli, hogy a feladatok mennyire nehezek (lásd a tankönyv bevezetőjét). Megjelöltük a feldolgozás szempontjából legfontosabbnak tartott feladatokat is. Ezek a jelek és a tankönyv tagoltsága kellő segítséget nyújtanak az osztály színvonalának és elképzeléseinknek megfelelő feladatok kiválasztásához.

A *folyamatos ismétléshez* tekintsük át az előző fejezetek gyakorlófeladatait és a **Matematika 6. Gyakorló**, a *tehetséggondozáshoz* a Törd a fejed! fejezetek, a **Versenymatek gyerekeknek** és a **Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény** feladatait is.

A tanmenetjavaslat után tételesen áttekintjük az adott fejezethez kapcsolódó ismeretrendszert, a tananyag tárgyalása során várható nehézségeket, a tipikus tanulási hibákat, ismertetjük a gyakorlatban bevált módszertani „fogásokat” stb.

A matematikatanítás egyik alapelve: „definíció segítségével senkinek sem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk”. (Skemp: *A matematikatanulás pszichológiája.* Gondolat, 1975.)

A legtöbb hatodik osztályos gyereknél még nem alakultak ki a „magasabb rendű” fogalmak, ezért még nem képesek deduktív úton elsajátítani az új ismereteket, esetleg kísérletekből, megfigyelésekből kiindulva, a feladatok sokaságát megoldva „felfedezik”, megsejtik azokat. *Általában nem definíciót tanítunk, hanem a fogalmakat fokozatosan pontosítjuk, egzaktabbá tesszük.* Ellenkező esetben a matematikatanulás értelmetlen verbalizmus szintjére süllyedhet. Ugyanakkor ha megértek a feltételek, akkor *fokozatosan követeljük meg, hogy a felismert összefüggéseket pontosan fogalmazza meg a tanuló.*

Sok olyan gyerek van, aki megérti mások gondolatmenetét, megérti egy-egy feladatban az összefüggéseket, de a saját tapasztalatát, gondolatait nem tudja elmondani. Ennek egyik oka a túlzott írásbeliség, a „beszédgyakorlatok” hiánya. Ez a fajta némaság fokozatosan a tanulás gátjává válhat. Tudatosan törekedjünk arra, hogy *a tanulóknak legyen alkalmuk megfogalmazni a mondanivalójukat* minél érthetőbben, pontosabban, tömörebben. (A tévedés szabadságával biztosított vita; tanulópárokban, kiscsoportokban folyó munka; beszámolók az egyéni munka eredményéről stb.)

A *házi feladat* megoldását mondja el egy-egy tanuló. Követeljük meg a tanult értelmezések és gondolatmenetek szabatos kifejtését. Ha elvárjuk, hogy az esetleges hibákat a többiek javítsák, akkor egy-egy tanuló szóbeli szerepléséből az egész osztály tanulhat.

Mielőtt az új anyag feldolgozását elkezdenénk, össze kell gyűjtenünk a szükséges – korábban tanult – ismereteket. Ebben segít az egyes fejezetekben található **Emlékeztető**. Az itt leírtakat is feladhatjuk egyéni, otthoni megtanulásra. *Matematikai szövegek megértésére* is neveljük a gyerekeket, ezen emlékeztetők önálló feldolgozása ezt a célt is szolgálja. Természetesen ha az ismeretek nem megalapozottak, vagy a tanulóink többsége még nem képes ezek önálló felelevenítésére, akkor az óra elején közös munkával is megerősíthetjük a továbblépéshez szükséges fogalmakat, eljárásokat, összefüggéseket.

A tankönyv az új fogalomrendszer kiépítését **felfedeztető feladatsorokkal** készíti elő, és **kidolgozott mintapéldákkal** követi nyomon. Az alternatív módszertani megoldások lehetőségeit a tananyag-feldolgozás tárgyalása során elemezzük.

A mintapéldák feldolgozása, a megoldások elemzése – általában a közepes vagy a közepesnél valamivel gyengébb képességű tanuló számára is érthető formában – *rögzíti a „felfedezéseket", a felismert összefüggéseket, a megtanulandó eljárásokat, gondolatmeneteket.* A példákhoz fűzött magyarázatok értelmezik a fogalmakat. A gyakorlatban az vált be, hogy a mintapéldákat a tanár közvetlen irányításával oldják meg és vitatják meg a gyerekek. Ebben az esetben olyan házi feladatot adjunk, amelynek megoldását elősegítheti a mintapélda megoldásának, a hozzáfűzött magyarázatnak az átnézése.

Néhány esetben (elsősorban emelt szinten) a kidolgozott mintapéldák tanulmányozását feladhatjuk házi feladatként is. Javasolhatjuk azt is, hogy hasonló feladatok megoldása során kövessék a mintapéldák megoldásában leírtakat. Ez a módszer szintén a matematikai szövegek megértésére nevelést szolgálhatja.

A *házi feladat* nehézsége és mennyisége igazodjon az egyes gyerekek egyéni képességeihez, jelentsen megterhelést, de még önállóan boldoguljon vele a gyerek, és megoldása 15–20 percnél többet ne vegyen igénybe.

Itt is felhívjuk a figyelmet arra, hogy a tankönyvben található **Tudáspróba** nem a minősítő értékelést szolgálja, ezért *nem alkalmas arra, hogy feladataiból dolgozatot írassunk*. E feladatokat differenciáltan tervezett egyéni munkában dolgoztassuk fel. Az eredményeket például írásvetítővel ellenőrizve hozzávetőleges képet nyerhetünk a pillanatnyi helyzetről. Ennek alapján megtervezhetjük az anyagrész összefoglalását, a hiányosságok pótlását, a gyakorlást, a korrepetálást, az „egyénre szabott" otthoni munkát stb. Ugyanakkor a tudáspróbákra nyújtott teljesítmény elemzésével és (fejlesztő jellegű) értékelésével tudatosíthatjuk a követelményeket, felkészíthetjük tanulóinkat a dolgozatra.

A **Matematika 6. Gyakorló 10. fejezete** is olyan témazáró feladatsorokat tartalmaz, amelyeket szintén fejlesztő értékelésre használhatunk fel. A hozzájuk kapcsolódó javítási és pontozási útmutatók segítségével a tanuló önállóan is ellenőrizheti, értékelheti tudását.

A minősítő értékelést a **Felmérő feladatok** különböző füzeteinek feladatsoraival végezhetjük el.

Óraterv

Az oktatási törvény bevezetésével tanévenként minimálisan 185 tényleges tanítási napot kell biztosítani (az európai norma 200 nap).

A kerettanterv *minimálisan* heti 3, évi 111 matematikaórát ír elő. Ez az óraszám a kerettantervben előírt minimális követelmények elérésére, a **redukált tananyagot** tartalmazó alapszintű tankönyv (**A** változat) tananyagának alapos feldolgozására sem elegendő. Ezért, ha a helyi tanterv heti 3 órát biztosít, akkor föltétlenül szervezzünk korrepetálásokat a lemaradók felzárkóztatására.

Felméréseink szerint az iskolák többségében a helyi tanterv 6. osztályban egy szabadon tervezhető órát, összesen heti 4 órát biztosít a matematikai nevelés számára, így egy tanévben 148 órával számolhatunk. Ez az óraszám föltétlenül szükséges a hatodikos tananyag átfogó tárgyalásához, megnyugtató begyakorlásához. Lásd a „bővített" tankönyv (**B** változat).

Az évi 111 órát, illetve 148 órát a következőképpen célszerű felosztani:

		A	**B**	
1.	*Számok és műveletek.* A számtan, algebra tananyag ismétlése, bővítése. A műveletek fogalmának és a műveleti eljárásoknak a kiterjesztése a racionális számkörre. Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. A helyi tanterv célkitűzéseit figyelembe véve, gyengébb csoportban redukálhatjuk a bővített tankönyv által tárgyalt anyagot. Az így felszabaduló időt a műveletek gyakorlására fordíthatjuk.	38	52	óra
2.	*Geometriai alakzatok vizsgálata.* Az ajánlott órakereten belül valósítsuk meg a differenciálást.	16	21	óra
3.	*Függvények, egyenes és fordított arányosság, százalékszámítás.* Kördiagramok. Valószínűségi kísérletek. Ha van rá lehetőségünk, akkor bővítsük a fenti órakeretet. Gyengébb csoportokban elegendő következtetéssel megoldatnunk a feladatokat.	20	24	óra
4.	Geometriai transzformációk. *Tengelyes tükrözés.* A bővített tankönyv a legjobb képességű osztályoknak is teret kíván biztosítani a megfelelő ütemű haladásra. Gyengébb csoportban csökkentenünk lehet a tananyagot.	14	24	óra
5.	*Nyitott mondatok.* Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Ismerkedés a mérlegelvvel. Biztosítsunk elegendő időt a témakör tárgyalására.	13	17	óra
6.	*Év végi összefoglalás.* Felzárkóztatás.	10	10	óra
Összesen a kötelező órakeretből:		111	148	óra

A fenti időkeret az ellenőrzésre szánt 12-12 órát is tartalmazza.

1. Számok és műveletek

Ez a fejezet tartalmazza a számtan, algebra tananyag mintegy 80%-át. Ha ezt a fejezetet a tanév első hónapjaiban egészében feldolgozzuk, akkor a következő fejezetek tárgyalása során, folyamatos ismétlés keretében pótolhatjuk a nehezebben haladó tanulók hiányosságait, begyakoroltathatjuk a legfontosabb számolási eljárásokat.

A fejezet minden nagyobb egységében először átismételjük, rendszerezzük, gyakoroljuk, magasabb absztrakciós szintre emeljük, majd *lényegesen kibővítjük* az előző öt évben tanult számtan, algebra tananyagot. A feladatsorokat úgy állítottuk össze, hogy alkalmasak legyenek a korábban tanult ismeretek összeszövésére, a 6. osztályban tanítandó anyagrészek megértésének, értelmezésének és elsajátításának az előkészítésére. Célunk volt az év eleji követelményszint feladatokkal való „lefedése" is.

A fejezet feladatanyagát a mennyiségi bőség és a tartalmi sokoldalúság jellemzi. Hogy ebből mit és mennyit dolgozzunk fel, azt a gyerekek matematikai ismereteihez és képességéhez kell igazítanunk. A jó képességű gyerekekkel káros lehet az alapvető ismeretek sulykoltatása, míg a kevésbé tehetséges gyerekek az érdekes matematikai problémák feldolgozásából (az alapvető ismeretek hiánya miatt) esetleg semmit sem értenek meg. Ha a tananyagot nem igazítjuk a gyerekek képességeihez, elidegeníthetjük őket a matematikától, ezért ebben a részben a tanórák mintegy felében *javasoljuk a differenciálást.* Mindenképpen **törekedjünk arra, hogy kellően megszilárdítsuk a korábban tanultakat, pótoljuk az ötödik osztályos tantervi követelmények teljesítése terén mutatkozó hiányosságokat**. Fontosnak tartjuk, hogy **addig ne lépjünk tovább, míg minden tanuló biztosan nem tudja a 6. osztályos minimumot**. Ezért a fejezet feldolgozásának időigénye az egyes osztályokban nagyon eltérhet.

A *számelmélet elemeinek* tanítása során összetett nevelési, képzési és oktatási feladatokat oldhatunk meg. A gyermek számára érthető, de szellemi erőfeszítést feltételező feladatok *fejlesztik a gyermek problémameglátó és problémamegoldó képességét.*

Az összefüggések feltárására, a fogalmak értelmezésére jól alkalmazhatjuk a *halmazelméleti,* a *logikai,* a *kombinatorikai* ismereteket és eljárásokat. Az újonnan tanultakat azonnal alkalmazhatjuk a törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása során. Ezzel a tanultak átfogóbb rendszerré állnak össze, ugyanakkor megszilárdíthatunk és kibővíthetünk fontos, korábban elsajátított ismereteket.

A gyermek általánosítja a konkrét számokkal „felfedezett" összefüggéseket – *indukció.* Megtanulja a felismert fogalmak és összefüggések *szabatos megfogalmazását,* és megteszi a kezdő lépéseket, hogy általános szinten *bizonyítsa* a megfogalmazott tételeket (összeg oszthatósága, oszthatósági szabályok, a legnagyobb közös osztó kiszámításának a módja stb.). Ugyanakkor látnunk kell, a 11-12 éves gyermek még nincs azon a szinten, hogy általánosan megfogalmazott definíciókat és tételeket tanuljon meg, megértse és elsajátítsa azok egzakt bizonyítását. Ezeknek az ismereteknek valamivel magasabb absztrakciós szintű feldolgozására 7. és 8. osztályban visszatérünk, de a *deduktív* tárgyalásra akkor is csak a gimnáziumi tagozatban kerülhet sor.

Tanulóink egy részének még ebben az életkorban is gyenge az elemi szóbeli számolási képessége. Az osztópárok keresése, a számok prímtényezőkre bontása, a törtekkel végzett számítások stb. lehetőséget adnak arra, hogy feltárjuk ezeket a hiányosságokat, és *határozottan megköveteljük az elemi szóbeli összeadás, kivonás, szorzás és osztás gyakorlását.* Vigyázzunk arra, hogy az elemi számolás ne váljék öncélúvá. Csak érdekes problémákhoz kapcsolódó, több órára tervezett, de az egyes órákon nem kimerítő gyakorlás vezethet célra.

A *helyi tanterv* kidolgozásakor, illetve a tanítás megtervezésekor vegyük figyelembe, hogy korábban meddig jutottak el tanulóink, mit őriztek meg a tanultakból, továbbá, hogy 7. és 8. osztályban milyen szinten kívánunk visszatérni a témára. A fejezet anyagának hiánytalan feldolgozását átlagos vagy gyengébb osztályban csak akkor javasoljuk, ha elegendő időt tudunk rá biztosítani. Ezekben az osztályokban a jobb képeségű tanulók fejlesztését névre szóló feladatsorokkal, illetve az otthoni tanulás *differenciált megszervezésével* oldhatjuk meg.

Idézzük fel a *racionális szám* értelmezését. Eddig elsősorban úgy találkoztak a tanulók a racionális szám fogalmával, hogy felsoroltuk, melyek ezek a számok (a 0, a pozitív és negatív egész számok és a törtek). Ezek közös tulajdonsága, hogy felírhatók két egész szám hányadosaként (míg a nem racionális számok nem írhatók fel ilyen alakban). A definíció után példákat mutatunk, amely példák a korábbi ismeretekhez kapcsolódnak.

6. osztályban eljutunk addig, hogy bármely tört felírható véges tizedestört vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban. A racionális számok halmazát így is megadhatjuk: az egész számok (pozitív, negatív, 0), a véges tizedestörtek és a végtelen szakaszos tizedestörtek.

A véges tizedestörteket a hatodikos tanuló is képes törtalakban felírni. Azt, hogy a végtelen szakaszos tizedestört átalakítható két egész szám hányadosává (esetleg szakkörön), néhány példával mutathatjuk meg jó képességű tanulóinknak, de követelményként ne szerepeljen az általános iskolában.

A racionális számok fogalmát is jobban megértik a tanulók, ha több olyan végtelen tizedestörtet is látnak, amelyek nem szakaszosak, azaz nem racionálisak a számok. Erre található példa a tankönyv 51. oldalán.

Akkor tekinthetjük optimálisnak a *számtan, algebra* tananyag feldolgozását, ha a tanuló képessé válik a különböző alfejezetekben (számelmélet, egész számok, törtek, tizedestörtek), tanultak integrálására. Például képesek kiterjeszteni a negatív egészekről, illetve a pozitív törtekről tanultakat a racionális számkörre.

Bár hatodik osztályban – zömében – a korábban elsajátított fogalmak képezik az alapját az újabb fogalmaknak (tehát már magasabb rendű fogalmakat alakítunk ki), mégsem mondhatunk le a szemléleti megalapozásról. A színesrúdkészlet, a területmodellek, a lyukastábla stb. nagyon sokszor itt is hasznosak a fogalomalkotás kezdeti szakaszaiban.

A **differenciálást** elsősorban a feladatok kiválasztásával oldhatjuk meg. A tankönyv, illetve a Matematika 6. Gyakorló feladatainak száma olyan nagy, hogy még nagyon jó osztállyal sem lehet megoldatni valamennyit. A szerzők célja az volt, hogy megfelelő lehetőséget biztosítsanak a felmerülő pedagógiai problémák megoldására. Ezért az osztály felkészültségétől függően válogassunk a feladatok közül.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A hatványozás fogalma, a 10 természetes szám kitevőjű hatványai.
2. Számok írása, olvasása, helyesírása a tízes számrendszerben, ábrázolásuk számegyenesen. A korábban tanultakat kibővítjük a 10^6-nál nagyobb és 10^{-6}-nál kisebb számok körére. Az osztályok többségében új tananyagnak tekinthető a hatványozás értelmezése és a helyiértékek felírása 10 hatványainak segítségével.

   Szorzás és osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel, ... Az írásbeli műveletek (a szorzó és az osztó természetes szám) begyakorlása, a hiányosságok pótlása. A korábban tanult műveleti tulajdonságok megerősítése. A helyes műveleti sorrend gyakorlása. Ezeknek az ismereteknek az alkalmazása a mértékegységek átváltásában.
3. A szövegelemző, szövegértelmező képesség fejlesztése céljából, a műveletek gyakorlásával párhuzamosan, oldassunk meg sok szöveges feladatot. Fontos az arányossági következtetések gyakorlása.
4. Közelítő érték. A kerekítés és a számtani közép kiszámításának felelevenítése. Elemi statisztikai vizsgálatok.
5. Felelevenítjük az „osztó", „osztható", „többszörös" stb. fogalmakat. *A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalma és kiszámítása* kis számok esetén.
6. A 2-vel, 5-tel, 10-zel; 4-gyel, 25-tel, 100-zal; jó csoportban 3-mal, 9-cel való *oszthatóság szabálya.* Az oszthatósági szabályokat konkrét számokkal végzett vizsgálatokra támaszkodva bizonyítjuk. Jó csoportban a *maradékokkal való számolással* előkészítjük az oszthatósági szabályokat.

   A halmazokról tanultak felhasználásával több oszthatósági szabályt együttesen alkalmazunk: oszthatóság 6-tal, 15-tel stb.
7. Jó csoportban: A *törzsszám, összetett szám fogalma.* Számok „építése" törzsszámokból, szorzás segítségével. *A természetes számok törzstényezőkre bontása.* A számelmélet alaptételét általánosan is megfogalmazzuk, de csak konkrét számokhoz kapcsolódva fedeztetjük fel a bizonyítás néhány elemét. Számok osztóinak, többszöröseinek vizsgálata a törzstényezőkre bontás segítségével.

   A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös kiszámítása a számok törzstényezős alakjából, a tanultak alkalmazása törtek egyszerűsítésében, összeadásában, kivonásában.
8. Az egész számok összeadásának és kivonásának gyakorlása, az értelmezés tudatosabb szintre emelése, általánosítása. A tanult műveleteket kiterjesztjük a negatív törtekre is. Például korábban a kivonást csupán kis abszolútértékű egész számok körében vártuk el. Most fokozatosan követeljük meg, hogy a tanulók előbb tetszőleges egész számokkal, majd tetszőleges racionális számokkal is képesek legyenek végrehajtani az összeadást és a kivonást. *Új tananyag* a szorzás és az osztás értelmezésének kiterjesztése negatív egész szorzóra, illetve osztóra.
9. *A törtekről, tizedestörtekről tanultak felelevenítése, a hiányosságok pótlása.*

   A fogalmak egymásra építettségét úgy biztosíthatjuk, hogy mindazon ismereteket, amelyeket ötödik osztályban vagy hatodik osztályban korábban tanultak, ismét

felszínre hozzuk, s ezekre építjük a magasabb rendű fogalmakat. *Például:* a különböző előjelű törtekkel végzett műveletek tanulása során automatikusan felhasználjuk az egészeknél tanultakat. Ehhez meg kell győződnünk arról, hogy rendelkeznek-e tanítványaink a szükséges alapokkal, azaz lehet-e a korábbi ismeretekre építenünk. A régebbi ismeretek felelevenítését, valamint a hiányok pótlását szolgálja minden fejezet elején az a néhány könnyebb feladat, amelynek megoldatását – éppen az előbbiek miatt – mindenképpen javasoljuk.

10. *Szorzás törttel és tizedestörttel. A törtrész kiszámítása.*

A törtek és a tizedestörtek szorzását mint egyazon fogalom két különböző megjelenési formáját tárgyaljuk, megmutatva mind az egészekkel, mind a törtekkel való hasonlatosságot, illetve különbözőséget.

11. *A reciprok fogalma. Osztás törttel és tizedestörttel.*

Az egység kiszámítása a törtrészből, törttel való osztással.

12. A racionális számokkal végzett műveletekről, az arányról, a százalékról tanultak alkalmazása a matematika különböző témaköreiben (egyszerű egyenletek, függvények, sorozatok, mérés, geometria).

13. *A szövegelemző és szövegértelmező képesség fejlesztése,* a műveletfogalommal kapcsolatos szöveges feladatok megoldása. Kapcsolat a mindennapi élettel, illetve a társtantárgyakkal.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika, kombinatorika

A tagadás, a logikai „és”, a logikai „vagy”, a „ha …, akkor …”, „legalább”, „pontosan” kifejezések értelmezése; halmazok egyesítése, közös része, különbsége.

Az anyagrész tárgyalását teljesen átszőhetjük a halmazelméleti és logikai ismeretek eszközszerű alkalmazásával. A számelméleti ismeretrendszer felépítésével párhuzamosan megtervezhetjük a halmazelméleti és logikai ismeretek rendszerezését és kibővítését is. *Például:*

A 2-vel osztható számok és a 4-gyel osztható számok halmazának vizsgálatához kapcsolódóan értelmezhetjük a *részhalmaz* fogalmát.

Vizsgálhatjuk a következő típusú kijelentések igazságát:

„Minden 4-gyel osztható szám osztható 2-vel.” „Minden 2-vel osztható szám osztható 4-gyel.” „Van olyan 2-vel osztható szám, amelyik nem osztható 4-gyel.”

„Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel.” „Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel.” (Ellenpélda keresése.) Ez utóbbi két kijelentéshez hasonló kijelentésekkel vizsgálhatjuk *egy tétel és megfordíthatóságának* a viszonyát (ezt azonban csak 7., 8. osztályban tudatosítjuk).

Például a 6-tal való oszthatóság vizsgálatánál vagy a közös osztók, közös többszörösök fogalmának kialakításához felhasználjuk *a halmazok közös részéről* tanultakat.

Kapcsolódunk az „*és*” és a „*pontosan akkor …, ha*” logikai műveletekhez: „Egy szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha osztható 3-mal és 2-vel.”

Egyes feladatok diszkussziója elvezet a logikai „*vagy*” alkalmazásához és *a halmazok egyesítésének* fogalmához.

A *maradékosztályok* fogalmát csak a legjobb osztályokban célszerű tudatosítanunk. Ennek ellenére a konkrét maradékosztályok vizsgálata előkészíti az *osztályozás* fogalmának kialakítását:

a) egyik részhalmaz sem üres;

b) mindegyik elem beletartozik valamelyik részhalmazba;

c) a részhalmazoknak nincs közös elemük.

A racionális számok részhalmazainak áttekintésekor, valamint az egyenletek, egyenlőtlenségek igazsághalmazának vizsgálatában is alkalmazzuk a halmazokról tanultakat.

A kombinatorika eszközjellegű alkalmazásával színesebbé tehetjük az esetenként könnyen egyhangúvá váló gyakorlóórákat.

Oszthatósági feladatok összes megoldásának keresésekor és a számok törzstényezőkre bontása során eszközjelleggel alkalmazzuk a kombinatorikai eljárásokat.

A számtan, algebra egyéb témakörei

A fejezet egyik alapvető célja az eddig tanult aritmetikai, számelméleti és algebrai ismeretek összegzése, összeszövése, begyakorlása és továbbfejlesztése. Ezért minden korábban tanult ismerettel kapcsolatba hozzuk az újonnan tanultakat.

Sorozatok, függvények

A helyiérték fogalmának kialakításához, a műveletek gyakorlásához eszközjelleggel használjuk a sorozatokat, függvényeket.

Vizsgálhatjuk egyes konkrét relációk tulajdonságait (a fogalmakat nem definiáljuk). Véges halmazokon ábrázolhatjuk ezeket a relációkat nyíldiagrammal. *Például:*

a) Az „5-tel osztva ugyanazt adja maradékul” reláció tulajdonságai (konkrét számokkal vizsgáljuk):

Minden elem relációban van saját magával, azaz minden számtól nyíl mutat saját magához.

Ha egy a szám relációban van b-vel, akkor b is relációban van a-val. A nyilakat oda-vissza meg kell húznunk az elemek között.

Ha a relációban van b-vel, és b relációban van c-vel, akkor az a relációban van c-vel is. Az egy osztályba tartozó elemek között meg kell húznunk az összes lehetséges nyilat.

b) Az „osztója” reláció tulajdonságai (konkrét számokkal vizsgáljuk):

Minden szám osztója saját magának.

Ha egy a szám osztója egy b számnak ($a \neq b$), akkor a b nem osztója az a-nak.

Ha a osztója b-nek, és b osztója c-nek, akkor az a osztója c-nek is.

Derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoltathatjuk, hogy a természetes számok rendre mit adnak maradékul például 5-tel osztva. A függvény tulajdonságainak vizsgálatával mélyebben megismerhetik a maradékos osztás (és a maradékosztályok) tulajdonságait.

A műveletekről tanultakat folyamatosan problémahelyzetben gyakoroltathatjuk: sorozatok folytatása, szabályok megfogalmazása, függvénytáblázat hiányzó elemeinek megkeresése adott vagy felismert szabály alapján, egyenes arányossági következtetések.

Mérések, geometria

A mértékegységek ismétlését, továbbá a téglalap kerület-, területszámítását és a téglatest felszín- és térfogatszámítását beépítettük a számtan, algebra tananyag ismétlésébe. Ezzel a tartalom bővítése mellett gyakoroltathatjuk a műveleteket. Az időmérésre jellemző ciklikusság alkalmas a maradékokkal való számolás előkészítésére (**1.54.** feladat).

A maradékosztályok és a forgásszimmetria közti kapcsolatot is felhasználhatjuk a maradékokkal való számolás szemléltetésére. Ugyanakkor előkészíthetjük a szabályos sokszögek fogalmát is. Ezek a felfedeztető feladatok komplex módon fejleszthetik a számelméleti, algebrai és geometriai ismereteket.

A mértékegységekkel szemléltetjük a tizedestörtekkel való számolást. A törttel való szorzás értelmezését a téglalap területének kiszámítására vezethetjük vissza.

Valószínűség, statisztika

A közelítő számításokhoz kapcsolódóan felelevenítjük az átlag fogalmát, illetve előkészítjük a szórás fogalmát.

A **B1.54.** feladat a valószínűségszámítás ismeretrendszerének felelevenítését szolgálja.

Tanmenetjavaslat

Normál vastagságú számjegyek jelentik a heti 3 órás *redukált képzésnek* megfelelő óraszámokat. Az *optimális* (heti 4 órás) *képzésben* résztvevők óraszámait **félkövér** számjegyekkel írtuk.

Óra	**Aktuális tananyag** Folyamatos ismétlés, koncentráció	**Feladatok**
1–2.	*Feladatok* a kombinatorika, a sorozatok, függvények és a halmazok, logika témakörökből. Részhalmaz. A hatványozás előkészítése.	Tk. B1.32–B1.37.; Gy. 1.01–1.09. 9.09–9.10.; Fgy. 1.1.14–48.
1–2. **3–4.**	*Hatványozás.* A pozitív egész kitevőjű hatvány értelmezése; a 0 kitevőjű hatvány. (Műveletek hatványokkal.) A helyiértékek felírása 10 hatványainak a segítségével. Kombinatorika (ismétléses variáció).	Tk. 1.01–1.05.; B1.38–B1.39.; Gy. 1.32–1.39.; Fgy. 1.2.50–53.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
3–4. **5–6.** **+ 1** óra	*Az egymilliónál nagyobb természetes számok írása, olvasása. Számok tizedestört alakja.* Helyiértékek rendszere a tízes számrendszerben: alakiérték, tényleges érték. Egész és tizedestört alakban adott számok ábrázolása, nagyság szerinti összehasonlítása. Hatványozás. Az írásbeli műveletek gyakorlása. Egyszerű egyenletek. Sorozatok. *Emelt szinten előkészítő jelleggel:* Egyenlő alapú hatványok szorzása, osztása.	Tk. 1.06–1.18.; B1.79., B1.82.; Gy. 1.10–1.16., 4.01–4.03; Fgy. 1.1.27., 1.1.38–48.
5. **7.**	*Szorzás és osztás 10-zel, 100-zal, …* A számok írásának, olvasásának gyakorlása.	Tk. 1.22–1.27.; B1.40–B1.41.; Gy. 9.11–9.14.
6–7. **8–10.**	*Mérés, mértékegységek,* mértékváltás. Mérőeszközök (mérőszalag, mérleg, űrmértékek; milliméterpapír, négyzetmétermodell; köbdeciméter-modell, köbmétermodell; térkép). *Kerület-, terület-, felszín-, térfogatszámítás.* Az írásbeli műveletek gyakorlása. Egyszerű szöveges feladatok, arányossági következtetések. Út, idő, sebesség.	Tk. 1.28–1.41.; B1.59–B1.66.; Gy. 7.10–7.13., 7.27–7.30., 7.34–7.41.; Fgy. 6.1.29–33.
8–9. **11–12.**	*Kerekítés, közelítő érték.* Az átlag kiszámítása. A gyerekek mindennapi életével kapcsolatos, aktuális statisztikai vizsgálatok. A mérés pontosságának jelzése. A szórás intuitív fogalmának előkészítése. Számok ábrázolása számegyenesen. Grafikonok vizsgálata. Adatok gyűjtése statisztikai zsebkönyvből, folyóiratokból.	Tk. 1.42–1.53.; Gy. 1.17–1.20., 4.23–4.27., 9.01–9.03.
10. **13.**	*Osztó, többszörös.* Osztópárok. Biztos, lehetséges, lehetetlen. Ha a kiegészítő anyagrészeket is feldolgozzuk, akkor a Gyakorlóból ajánlott feladatok egy részét később is megoldathatjuk.	Tk. 1.54.; Gy. 1.41., 1.43–1.46.
11. **14.**	*Közös osztók, a legnagyobb közös osztó.* Szóbeli számolás. Halmazok közös része. Kombinatorika.	Tk. 1.55.; B1.52–B1.53.
12. **15.**	*Közös többszörösök, a legkisebb közös többszörös.* Halmazok közös része.	Tk. 1.56.; Gy. 1.56–1.57., 1.60.
13–14. **16–17.**	10-zel, 2-vel, 5-tel, 100-zal, 4-gyel, 20-szal, 25-tel, 50-nel való oszthatóság szabálya. Halmazok, logika. Maradékosztályok. Elforgatás.	Tk. 1.57–1.68.; Gy. 1.42., 1.52., 1.47., 1.54., 1.59.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
– **18.**	*Számoljunk a maradékkal!* Osztó, többszörös, osztópárok. Időmérés (óramodell). Összeg szorzása.	Tk. B1.01–B1.03.; Gy. 1.43.
– **19.**	3-mal, 9-cel való oszthatóság szabálya. Elforgatás. Maradékosztályok. Részhalmaz. Igaz, hamis állítások. Halmazok közös része.	Tk. B1.04–B1.07.; Gy. 1.53.
– **20.**	*Vegyes oszthatósági feladatok.* Az oszthatósági szabályok gyakorlása. Oszthatóság 6-tal, 15-tel stb. Halmazok közös része. (Tétel és megfordítása.) Kombinatorika, valószínűség.	Tk. B1.08–B1.12.; Gy. 1.48–1.51., 1.58., 9.32–9.35., 9.57.; Fgy. 1.3.11–20.
– **21–22.**	*Törzsszámok, összetett számok.* Eratoszthenész „szitája”. *A természetes számok felírása törzsszámok szorzataként.* Kombinatorika. Relációk. Hatványozás.	Tk. B1.13–B1.16.; Gy. 1.44–1.46., 1.61–1.62.; Fgy. 1.3.01–05.
– **23–24.**	Az osztók törzstényezős alakja. *A legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása* a számok prímtényezős alakjából. Hatványozás.	Tk. B1.17–B1.31., B1.57–B1.58.; Gy. 1.62–1.65.; Fgy. 1.3.21–36.
– **25.**	*Gyakorlás.* Vegyes gondolkodtató feladatok a számelmélet témaköréből.	Tk. B1.42–B1.51., B1.54–B1.56.; B1.67.; Gy. 10.06.
15. **26.**	*Az egész számok értelmezése, összehasonlítása.* *Derékszögű koordináta-rendszer.* Függvények.	Tk. 1.69–1.75.; Gy. 2.01–2.06.; Fgy. 2.1.06.
16–17. **27–28.**	*Egész számok összeadása, kivonása.* (Ismétlés, rendszerezés.) Többtagú összegek az egész számok körében. Az összeg, különbség változásai. Egyenletek megoldása.	Tk. 1.76–1.81.; Gy. 2.07–2.18.; Fgy. 2.1.10–13., 2.2.20–21.
18–19. **29–30.**	*Egész szám szorzása egész számmal.* (A szorzás értelmezése negatív szorzóval.) Egyenes arányosság. A szorzat tényezőinek felcserélhetősége. Hatványozás.	Tk. 1.82–1.84.; Gy. 2.19–2.20., 2.22., 2.27., 9.09–9.11.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
20. **31.**	*Egész szám osztása egész számmal.* Az osztás értelmezése negatív osztóval. A 0 szerepe. Egész számok szorzása. Egyenletek.	Tk. 1.85–1.86.; Gy. 2.23–2.26.
21–23. **32–34.**	*Gyakorlás.* Összetett számfeladatok megoldása az egész számok körében. Műveletek sorrendje, zárójelhasználat. **1. felmérés**	Tk. 1.87–1.88.; B1.81., B1.97.; Gy. 2.28–2.36.; Fgy. 2.2.22–37.; Felmérő feladatsorok
24. **35–36.**	*A törtekről tanultak ismétlése.* Törtek értelmezése, összehasonlításuk, egyszerűsítésük, bővítésük. *Vegyesszámok.* Közös osztó alkalmazása.	Tk. 1.89–1.100.; B1.68–B1.71.; Gy. 3.01–3.13.; Fgy. 3.1.06–12., 3.2.09–10.
25. **37**	*A racionális szám fogalma.* A racionális számok tizedestört alakja.	Tk. 1.101–1.105.; B1.80., Gy. 3.06., 4.04–4.15.; Fgy. 3.1.13–17., 3.2.11–17.
26–27. **38–40.**	*A racionális számok összeadása, kivonása.* Többtagú összegek a racionális számok körében. A törtek, tizedestörtek, egész számok összeadásáról tanultak alkalmazása. Közös többszörös. Zárójel használata. Szöveges feladatok. Sorozatok, egyenletek.	Tk. 1.106–1.123.; B1.72–B1.78.; Gy. 3.14–3.31., 4.28–4.37.; Fgy. 3.3.20–24., 4.2.04–09.
28–29. **41–43.**	*Szorzás törttel. Törtrész kiszámítása.* Tört szorzása egész számmal, egész szám szorzása törttel, tört szorzása törttel (kísérletek területmodellel, színesrúdkészlettel). Vegyesszám szorzása vegyesszámmal. *Gyakorlás.* Szöveges feladatok. Műveleti tulajdonságok; a szorzat és a hányados változásai, összeg, különbség szorzása. Arányossági feladatok – következtetés. Sorozatok, függvények. Egyenletek. Geometriai számítások, mértékegységek.	Tk. 1.124–1.138.; Gy. 3.35–3.37.; Fgy. 3.3.41–42.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
30–31. **44–45.**	*Szorzás tizedestört alakú számmal,* negatív számmal is. A törtrész kiszámítása. Szorzás 0,1-del, 0,01-dal, 0,001-del, … Műveleti tulajdonságok; a szorzat változásai; szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel. A szorzás algoritmusa. Sorozatok, függvények. Egyenletek. Kombinatorika. Szöveges feladatok. Arányossági következtetések. Geometriai számítások, mértékegységek.	Tk. 1.139–1.151.; Gy. 4.49–4.63.; Fgy. 4.2.10.
32–33. **46–47.**	*A reciprok fogalma. Osztás törttel.* A tört osztása természetes számmal, természetes szám osztása törttel, tört osztása törttel (területmodell); különböző előjelű törtek osztása. Szorzás törttel, szorzás az osztás fordított művelete; műveleti tulajdonságok. Egyenlet megoldása a műveletek közti összefüggések alapján; sorozatok, függvények. Geometriai számítások, mértékegységek. Fizikai fogalmak: sűrűség, sebesség …	Tk. 1.153–1.167.; Gy. 3.43–3.59.; Fgy. 3.3.27–30., 3.3.32–40., 3.3.43–64.
34–35. **48–49.**	*Osztás tizedestört alakú számmal.* Kerekítés, pontosság. Osztás 0,1-del, 0,01-dal, 0,001-del; az összefüggés megfigyelése. A hányados változásai. Szorzás 10-zel, 100-zal, 1000-rel, … Az osztás ellenőrzése szorzással. Műveletek sorrendje. Sorozatok. Egyenletek. Geometriai számítások, mértékegységek.	Tk. 1.168–1.178.; Gy. 4.64–4.74.; 9.12–9.14. Fgy. 4.2.11–14.
36–38. **50–52.**	*Gyakorlás.* (A számolási rutin differenciált fejlesztése.) **2. felmérés.** *Értékelés.* A hiányosságok pótlása.	Tk. 1.179–1.199.; B1.83–B1.96., B1.98–B1.110.; Gy. 9.06–9.08.; Fgy. 4.2.17–30.; Felmérő feladatsorok

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Érdekes fejtörő feladatok (A bővített változatban szereplő fejezet.)

Ennek a résznek a feladatait többféleképpen építhetjük be a tanulási folyamatba.

Jobb képességű osztályban kezdhetjük az évet a matematika különböző területeihez kapcsolódó, más-más megközelítést feltételező, nem szokványos feladatok megoldásá-

val. Egy-két órában mintegy „bemelegíthetjük” a későbbi munkát, felkelthetjük a tanulók érdeklődését, felfigyelhetünk tehetséges, érdeklődő tanítványainkra.

Az osztályok többségében ne foglalkozzunk egyfolytában ezekkel a feladatokkal. Az első órán egy-két „csalafinta” feladat buktatói rámutathatnak a *szövegelemzés, értelmezés* fontosságára, majd néhány feladattal előkészíthetjük a hatványozást. A többi feladatra a későbbi, sokszor fárasztó gyakorlások közben, pihentetőként térjünk vissza.

Az érdekes tananyagot még akkor is kedvvel, odaadással dolgozza fel a gyermek, ha nagyobb erőfeszítést kívánunk tőle. Ezért bármely anyagrész tanítása során érdemes elgondolkodnunk, mindent megtettünk-e azért, hogy ne váljék unalmassá a matematikatanulás.

Az alapvető számolási technika begyakorlását nehéz érdekfeszítővé tenni, elidegenítheti még az érdeklődő tanulókat is a matematikától. Ha nem is lehet mindenki számára minden órán érdekessé tenni a munkát, a különböző típusú feladatok váltogatásával oldjuk a monotonitást, és törekedjünk arra, hogy minden órán legyenek a gyermek számára emlékezetes, érdekes mozzanatok.

A feladatok egy részének megoldását kitűzhetjük pontversenyre is.

Hatványozás

A hatványalakkal már korábban is találkozhattak a tanulók, de csak hatodik osztályban követelhetjük meg mindenkitől ennek a fogalomnak az alkalmazásképes elsajátítását.

Érdemes néhány nem szokványos feladattal felelevenítení a korábban tanultakat (ilyen az **1.**, **2.** példa), ezután térhetünk rá az értelmezésre, a jelölések és elnevezések tisztázására. Ebben a szakaszban csak számpéldákhoz kötve taníthatjuk meg ezeket az ismereteket. A következő órákon, majd a számelmélet tananyagához kapcsolódva begyakoroltathatjuk az itt tanultakat.

Célszerű nagy hangsúlyt helyeznünk a 10 hatványainak vizsgálatára, a helyiértékek felelevenítésére. A hatványozás azonosságait nem tanítjuk meg, de konkrét feladatok megoldása során a tanulók felismerhetik az összefüggéseket. Koncentrációként kombinatorikai feladatokat oldathatunk meg (a **2.** példához hasonlókat a gyerekek is készíthetnek), és a négyzet területének, valamint a kocka térfogatának kiszámításában alkalmazhatjuk a hatványjelölést.

A negatív egész kitevőjű hatvány értelmezéséhez itt még nem értek meg a feltételek, ezért az osztályok többségében nem javasoljuk ennek a fogalomnak a bevezetését. A 0 kitevőjű hatvány (konkrét példákhoz kötött) értelmezését megmutathatjuk. Ebben az esetben hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a 0^0 hatványt nem értelmezzük.

Számok írása, olvasása, ábrázolása

5. osztályban legfeljebb tízmillióig gyakoroltattuk a természetes számok írását, olvasását. A tízmilliónál nagyobb számok írását, olvasását most sem várhatjuk el „készség szinten”, de érjük el, hogy a számok elnevezésének a sémáját sajátítsa el a gyermek (lásd a tankönyvben lévő táblázatot). Értse meg a helyiérték és az alakiérték lényegét, ismerje a helyiérték elnevezéseit. A helyiértékes írásmódot kiterjesztjük a tizedestörtekre.

A számok írását, olvasását gyakoroltathatjuk műveletvégzéshez kapcsolva is. Például hasznos lehet a 10-zel, 100-zal, 1000-rel végzett szorzás és osztás, valamint a mértékváltás gyakorlása.

Fontos a helyiértékek felírása 10 hatványainak segítségével. Ez nemcsak az előző anyagrészek megerősítését, hanem a számok normálalakjának (**Tk. B1.40.** feladat), továbbá a hatványokkal végzett műveleteknek az előkészítését (**B1.38–B1.39.**) is szolgálja. Koncentrációként olyan mértani sorozatokkal foglalkozhatunk (a fogalom és az összefüggések tudatosításának igénye nélkül), amelyek hányadosa 10 valamely egész kitevős hatványa (**1.19., 1.26.**), továbbá egyszerű egyenleteket (**Tk. 1.27., B1.41.**) oldhatunk meg.

Már az elmúlt években is tudatosítottuk, hogy egy számnak sokféle alakja van, és ezek közül szabadon választhatunk attól függően, hogy melyik alakkal tudjuk egyszerűbben megoldani az adott feladatot. A számegyenes pontjaival való szemléltetés nagyon alkalmas arra, hogy ráirányítsuk a figyelmet a számok értéke és alakja közti különbségre. Amikor azt mondjuk, hogy a számegyenesen minden ponthoz egy szám tartozik, akkor a szám értékére gondolunk, de ezt a számot sokféle alakban felírhatjuk.

Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel, …

Fontos, hogy a tanulók ismerjék fel a 10 hatványaival való szorzás, illetve osztás algoritmusának a lényegét. Így nem kell külön-külön „szabályt” mechanikusan elsajátítaniuk és alkalmazniuk.

Figyeltessük meg, hogy a 10 hatványaival való szorzás (osztás) általában nem nullák hozzáírását (elhagyását) jelenti!

A megértés nélkül elsajátított szabály alkalmazása komoly gondot jelenthet a következő típusú feladatok megoldásában: $3{,}58 \cdot 10\,000$; $5600 : 100\,000$ stb.

Mérés, mértékegységek

Bár az alkalmi és a szabvány mértékegységekkel való mérés már a korábbi években is minimumkövetelmény, a tapasztalatok azt mutatják, hogy sok tanuló nehezen képes elsajátítani és alkalmazni ezeket az ismereteket. Ha a hiányosságok általánosan jelentkeznek, akkor iktassunk be tényleges méréseket, becsültessük meg különböző tárgyak hosszméreteit, tömegét, űrtartalmát. Fontosnak és hasznosnak tartjuk *hosszúságok, irányok, területek mérését térképen* (koncentráció a földrajzzal).

A mértékegységek átváltásával gyakoroltathatjuk a 10-zel, 100-zal, … való szorzást és osztást, valamint 10 hatványainak értelmezését, kiszámítását. A mértékegységek átváltásával előkészíthetjük a *fordított arányosság* tanítását. Már korábban is utaltunk rá, hogy összekapcsolhatjuk a mérések és a közelítő értékkel kapcsolatos ismeretek gyakorlását. A kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás jó alkalom a műveleti tulajdonságok (a szorzat tényezőinek felcserélhetősége, csoportosíthatósága, összeg szorzása) gyakorlására.

A gyakorlati jellegű szöveges feladatok elsősorban a *fizikában* tanulandókat készítik elő (sűrűség, sebesség), de a szöveges feladatok értelmezése és megoldása, a megol-

dások ellenőrzése a matematikai problémameglátó és -megoldó képességet is fejleszti, továbbá előkészíti az egyenes arányosság tanítását (**Gy. 5.26–5.40.** feladat).

Ilyen jellegű feladatokat, szükség esetén, építsünk be a folyamatos ismétlésbe.

A feladatok egy részét a geometriaanyag (tankönyv 2. fejezet) tárgyalása során is megoldathatjuk.

A felmérések azt mutatják, hogy a tanulók mintegy fele (a jó képességű tanulók sem kivételek!) még a 8. osztály végén is bizonytalan a mértékegységek használatában, ami a középfokú iskolákban a matematikatanulás eredményességén túl a fizika, a kémia és a szakmai tárgyak tanulását is kedvezőtlenül befolyásolhatja. Ezért azt javasoljuk, hogy szinte minden órán 3-4 mértékváltásos feladat kerüljön a táblára, vagy házi feladatként adjunk fel ilyen feladatokat, és következetesen ellenőrizzük megoldásukat.

Kerekítés, pontos érték, közelítő érték

A korábbi években több példát láttak a gyerekek arra, hogy egy szám mikor jelenthet pontos értéket és mikor közelítő értéket. A közelítéssel leggyakrabban a mérésekkel kapcsolatban találkoztak. Gyakran dolgoztak statisztikai adatokkal is, amelyek többsége kerekített érték volt. Megtanulták, hogy az írásbeli műveletek eredményét kerekített értékekkel számolva becsülhetik meg. Most ezeket az ismereteket felelevenítjük, megerősítjük. Tudatosítjuk, hogy a kerekített érték is közelítés.

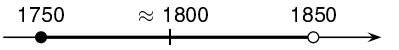
A két mintapélda a közelítés fokának különböző kifejezési formáira utal. Az **1.** példában a természettudományok méréses módszerével ismerkedik meg a gyermek (az életkorának megfelelő szinten), amikor a közelítő érték a mérési eredmények *számtani közepe.* Hasznos lehet hasonló, de a gyermek által könnyen elvégezhető, aktuális mérési feladatok feldolgoztatása *csoportmunkában,* illetve házi feladatként. (Mennyi egy füzet tömege; hányat ver egy perc alatt a szív; milyen hosszú az arasz; mennyi víz fér egy evőkanálba; stb.)

A közelítő érték mellett ismernünk kell, hogy mekkora lehet az *eltérés a közelítő érték és a tényleges érték közt.* Ezt a lehetséges eltérést figyelembe kell vennünk a közelítő értékekkel történő számolás során (például **Tk. 1.52.** feladat).

A közelítés fokát különbözőképpen fejezhetjük ki:

a) Kettős egyenlőtlenséggel, például: $1750 \leqq h < 1850$.

b) Számegyenesen ábrázolva:



Ezzel jól szemléltethetjük a közelítő érték jelentését: a tényleges érték az adott számköz bármely eleme lehet, ezért a közelítő értékkel nem úgy kell számolnunk, mint egy számmal, hanem úgy, mint egy számközzel.

c) A gyakorlatban elterjedt a következő típusú jelölés: $h = 1800 \pm 50$.

Ez esetben nem fejezzük ki, hogy a számköz alulról zárt, felülről nem, de a gyakorlati mérések során erre nincs is szükség.

d) Az *értékes jegyek* számával is jellemezhetjük a közelítő érték pontosságát.

A tankönyv a tizedestörtek körében mutat példát az értékes számjegyek értelmezésére.

Ha úgy látjuk, hogy tanulóink korábban jól elsajátították a közelítő értékkel kapcsolatos ismereteket, akkor ennek a témakörnek az ismétlésére ne szánjunk külön órát. *A*

kerekítést felelevenítethetjük a műveleti eredmények becslése során, a közelítő értékkel kapcsolatos egyéb tudnivalók tárgyalását beépíthetjük a mértékegységek ismétlésébe.

Osztó többszörös

Konkrét példákhoz kapcsolódva felelevenítjük a korábban tanultakat.

A bevezető feladat alkalmas annak a felmérésére, hogy mire emlékeznek a gyerekek a korábban tanultakból. Ennek függvényében döntsük el, hogy mennyi időt szánunk az ismétlésre, illetve az oszthatósági szabályok tanításának előkészítésére. Javasoljuk, hogy a „játék", és ne a szabályok minden áron való keresése és megtanulása legyen a jellemző, de mindenképpen tisztázzuk az *osztó* és a *többszörös* fogalmát. Már itt felhívhatjuk a figyelmet arra, hogy a matematikában a szavak nem mindig azt jelentik, mint a hétköznapi életben. Például a *többszörös* jelentheti a szám 0-szorosát és 1-szeresét is (a felmérések szerint a gyerekek többsége ezt még nyolcadik osztályban sem tudja).

Állapodjunk meg abban is, hogy ha mást nem mondunk, akkor a természetes számok körében dolgozunk.

Közös osztók, a legnagyobb közös osztó
Közös többszörösök, a legkisebb közös többszörös

Konkrét számokat vizsgálva, osztóik halmazainak *közös részét* képezve jutunk el a *közös osztó* fogalmához.

Lényegében hasonló módon alakítjuk ki a *közös többszörös* és a *legkisebb közös többszörös* fogalmát. Hangsúlyozzuk, hogy a pozitív közös többszörösök közül választjuk ki a legkisebbet. Ennek alapvető tulajdonsága, hogy *minden közös többszörösnek osztója.* (A negatív többszörösök között nincs legkisebb. A 0 minden számnak többszöröse, ezért a számelméleti problémák többségében érdektelen a vizsgálata.)

A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös kiszámítását *a törtek egyszerűsítésével,* illetve *összevonásával* gyakoroltathatjuk. A törtekkel végzett műveletek biztos elsajátításához sok időre van szükség, ezért folyamatosan érdemes megoldatni ilyen feladatokat.

Heti 4 matematikaóra esetén ebben az évben megtaníthatjuk a számok prímtényezőkre bontását, és *jobb csoportban* a legnagyobb közös osztó, illetve a legkisebb közös többszörös meghatározását a prímtényezőkre bontás alkalmazásával.

Az *átlagosnál gyengébb osztályokban* esetleg hetedik osztályra halaszthatjuk a legnagyobb közös osztó, illetve legkisebb közös többszörös *kiszámításának* a megtanítását. Ebben az esetben a tehetségesebb tanulóinkkal (vagy például a hatosztályos gimnáziumba készülőkkel) külön kell foglalkoznunk.

Mit árulnak el a szám utolsó számjegyei?

A szabályokat ne tanári magyarázat alapján sajátítsák el a gyerekek, hanem sokoldalú tapasztalatszerzéssel jussanak el azok önálló felismeréséig. Az **1.59.** feladat feldolgoztatását nem csak szemléletessége miatt tartjuk fontosnak. Az ilyen típusú feladatokkal

előkészítjük a szabályos sokszögek tanítását, továbbá a forgásszimmetria és a maradékosztályok algebrája közti mélyebb kapcsolatok felismerését.

A szemléletre és konkrét példákra támaszkodva vetessük észre a következőket:

A természetes számok sorozatában *ciklikusan követik egymást* azok a számok, amelyek például 5-tel osztva 0-t, 1-et, 2-t, 3-at, 4-et adnak maradékul. Ezzel intuitív szinten kialakíthatjuk a *maradékosztály* fogalmát. (Az elnevezést a tankönyv nem használja, gimnáziumi tagozaton esetleg bevezethetjük ezt a fogalmat.)

Hogy egy szám 2-vel, 5-tel, 10-zel osztva milyen maradékot ad, azt felismerhetjük utolsó számjegyéről.

Egy szám pontosan akkor osztható 10-zel, ha osztható 2-vel és 5-tel.

Ügyeljünk arra, hogy tanulóink ne a szabályok „bemagolására" törekedjenek, hanem ismerjék fel azok matematikai tartalmát, a bennük lévő rendszert. Figyeltessük meg, hogy egyik esetben a 10-zel és osztóival, másik esetben a 100-zal és osztóival kapcsolatosan értelmezzük az oszthatósági szabályt. A szabály pontos megfogalmazását is követeljük meg. *Például* a tanulók hajlamosak arra, hogy a 100-zal, a 4-gyel, a 25-tel, a 20-szal és az 50-nel való oszthatósági szabályt pontatlanul fogalmazzák meg: „…ugyanannyit ad maradékul, mint utolsó két számjegye". Mutassuk meg, hogy ez a 10-zel, a 2-vel és az 5-tel való oszthatósági szabály hibás átfogalmazása, egészen mást jelent, mint amit mondani akarunk.

Megjegyezzük, hogy a 100-zal, a 4-gyel, a 25-tel, a 20-szal és az 50-nel való oszthatósági szabály – éppen tömörsége miatt – nehéz.

Számoljunk a maradékkal! (A bővített változatban szereplő fejezet.)

Az anyagrész feldolgozásával tudatosabb szintre emelhetjük az oszthatósági szabályokról tanultakat.

A kidolgozott példákhoz hasonló feladatok megoldásával érzékeltethetjük a maradékokkal való számolás jelentőségét. Ezt készíthettük elő a „naptárszámtan" témakörébe tartozó játékos feladatok megoldásával. *Például* az **1.54.** feladatot aktuálisan átfogalmazhatjuk és kibővíthetjük. Mérlegeljük, hogy az osztály többsége képes-e az általánosabb összefüggéseket felismerni és megfogalmazni. Ha nem, akkor maradjunk a konkrét számoknál.

Milyen összefüggéseket „fedezhetnek fel" a gyerekek? (A példákkal érzékeltetni szeretnénk azt is, hogy az általánosítás és elvonatkoztatás milyen szintjére juthatunk el.)

Egy számot 5-tel osztva a maradék 0, 1, 2, 3, 4 lehet.

Ha több 5-tel osztható számot összeadunk, akkor az összeg is osztható 5-tel.

Ha több 5-tel osztható számot és egy 5-tel nem osztható számot adunk össze, akkor az összeg biztosan nem osztható 5-tel.

Ha két (három) számot összeadunk, akkor az összeg ugyanazt a maradékot adja 5-tel osztva, mint a tagok ötös maradékának összege.

Ha egy számot megszorzunk 4-gyel, akkor a szorzat ugyanazt a maradékot adja 5-tel osztva, mint a szám ötös maradékának a négyszerese.

Ha egy számot megszorzunk 10-zel, akkor a szorzat oszható 2-vel és 5-tel.

Hasonló vizsgálatokat bármely más pozitív osztó esetén végeztethetünk. Ugyanakkor általános összefüggéseket nem célszerű „megtanítanunk” ebben az évben. Fontosabb az, hogy tanulóink a konkrét feladatokban felismerjék ezek alkalmazhatóságát.

Állapodjunk meg abban, hogy ha nem mondunk mást, akkor *a természetes számokkal* dolgozunk, de mutassuk meg, hogy *a többszörös és az osztó fogalmát kiterjeszthetjük az egész számokra.*

Mit mutat meg a számjegyek összege? (A bővített változatban szereplő fejezet.)

Az előző részben megfogalmazott általános módszertani javaslatok erre a részre is érvényesek, de itt a tapasztalatgyűjtés (indukció) mellett nagyobb szerepet kap a gondolati megközelítés (dedukció). A maradékokkal való számolás során felismert összefüggéseket alkalmazzuk.

Kiegészítő anyagként, gimnáziumi tagozaton vagy szakkörön foglalkozhatunk a 11-gyel való oszthatóság vizsgálatával.

Az 1 tizenegyes maradéka: 1;
a 10 tizenegyes maradéka: 10, vagyis – 1;
a 100 tizenegyes maradéka: 1;
az 1000 tizenegyes maradéka: 10, vagyis – 1; és így tovább.

Ebből következik, hogy *például*
5987 tizenegyes maradéka: $7 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 9 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = 3$.
5187 tizenegyes maradéka: $7 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = -5$, azaz 6.
5687 tizenegyes maradéka: $7 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = 0$, vagyis a szám osztható 11-gyel.

Vegyes oszthatósági feladatok (A bővített változatban szereplő fejezet.)

Nemcsak az oszthatósági szabályok begyakorlására van módunk, hanem előkészíthetjük a számok törzstényezőkre bontásának tanítását is, továbbá halmazelméleti, logikai, kombinatorikai ismereteket és eszközöket alkalmazva új oszthatósági szabályokat is megfogalmazhatunk és begyakoroltathatunk (például a 6-tal, 15-tel való oszthatóságot).

Fordítva, ebben a néhány órában alkalmunk nyílik a logikai műveletek („és”, „vagy”, „ha …, akkor”, „pontosan akkor …, ha”), a halmazműveletek és a részhalmaz fogalmának a gyakorlására. *Például:* Egy szám *pontosan akkor* osztható 6-tal, *ha* osztható 3-mal és 2-vel.

A kombinatorikai feladatok segítségével problémahelyzetben mélyíthetjük el a tanultakat. Csak akkor indokolt ezeknek a feladatoknak az elhagyása, ha nagyon szorít az idő, vagy nagyon gyenge képességű osztályban tanítunk.

Törzsszámok, összetett számok (A bővített változatban szereplő fejezet.)

A „*törzsszám*” értelmezése során az *irreducibilis elem* fogalmára utalunk. Az *irreducibilis elem* (valódi osztók szorzatára felbonthatatlan elem) és a *prímelem* két különböző fogalmat jelent a számelméletben. Az egész számok halmazában a két fogalom ekvivalens, ezért a „prímszám” elnevezést is szokták használni irreducibilis

elem értelemben. Azokkal a tételekkel, amelyekben szükséges a két fogalom megkülönöztetése, az általános iskolában nem foglalkozunk. A két elnevezést (törzsszám és prímszám) célszerű párhuzamosan használnunk, mert a különböző könyvekben mindkettő szerepel.

A tanulók előtt váljék nyilvánvalóvá, hogy *a törzsszámoknak pontosan két, az összetett számoknak kettőnél több, de véges sok osztójuk van a természetes számok körében.* Ezért az 1 se nem törzsszám, se nem összetett szám.

Mutassunk rá, hogy minden szám osztója a 0-nak, de a 0 egyik 0-tól különböző természetes számnak sem osztója. A 0 nem tartozik sem a törzsszámok, sem az összetett számok közé.

Ebben a részben a számok osztóit az *osztópárok* felsorolásával adjuk meg. Az osztópárok nagyságrendjének a vizsgálata előkészítheti annak felismerését, hogy az osztópár egyik tagja nem nagyobb (a másik nem kisebb) a szám négyzetgyökénél. Természetesen ezt így csak nyolcadik osztályban fogalmazhatjuk meg.

Ne csak utaljunk Eratoszthenész „szitájára", hanem az eljárást alkalmazzák is a tanulók (**Gy. 1.61.**).

A természetes számok felírása törzsszámok szorzataként
(A bővített változatban szereplő fejezet.)

A bevezető feladatokban számokat „építünk" törzsszámokból, szorzás segítségével. Már ezeknek az előkészítő feladatoknak a megoldása során ismételjük át a hatványozásról tanultakat, de ne erőltessük a hatványalak használatát. Következő lépésként azt vizsgáljuk, hogy bizonyos számok felépíthetők-e az adott törzsszámokból. Így fokozatosan nehezedő feladatok megoldásával jutunk el a számok törzstényezőkre bontásához.

Ha tanulóink gyengén számolnak, akkor erre a részre több órát kell szánnunk.

A számelmélet alaptételének egy (a hatodikos gyermek számára is hozzáférhető) leszűkített változatát fogalmazza meg a tankönyv, a bizonyítás gondolatmenetét is felvázolva. Sem a tételt, sem a bizonyítást ne kérjük számon, magát az eljárást viszont gyakoroltassuk be még a leggyengébbekkel is.

Beszéljük meg, hogy a számok törzstényezőkre bontása során tetszőleges sorrendben vonhatjuk be a vizsgálatba a törzsszámokat, ennek ellenére célszerű a törzsszámokat növekvő sorrendben megnézni.

A törzstényezőkre bontás egyik alkalmazása a szám törzstényezős alakban felírt osztóinak vizsgálata (**B1.18–B1.19.** feladat, illetve **2.** példa). A tanultak begyakorlása mellett, ezekkel a feladatokkal készíthetjük elő a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös meghatározását a törzstényezős alakból. Itt se kész szabályokat tanítsunk, a tanulók maguk ismerjék fel az összefüggéseket. Az osztók megkeresése ily módon a kombinatorikus gondolkodást is fejleszti.

Mivel a következő 4-5 órán alkalmazzuk a számok törzstényezőkre bontását, most nem szükséges „készre tanítanunk", akár már egy óra után is továbbléphetünk. A leggyengébb osztályokban, ha nincs elég időnk, akkor elhagyhatjuk ezeknek a feladatoknak a feldolgozását.

Az előzőekben tárgyalt előkészítés után már a legtöbb tanuló számára nem jelent nehézséget annak felismerése, hogy két (vagy több) szám közös osztóit felépíthetjük szor-

zással a számok prímtényezős alakjában közösen előforduló prímtényezőkből. Minden további értelmezés nélkül kiválasztjuk a közös osztók közül a legnagyobbat, és ezt nevezzük a számok legnagyobb közös osztójának. Felismerjük, hogy *a legnagyobb közös osztó minden közös osztónak többszöröse.* Tudatosítjuk, hogy bármely két pozitív természetes számnak van legnagyobb közös osztója, ha nincs közös prímtényezőjük, akkor a legnagyobb közös osztó 1.

Hasonlóan fedeztethetjük fel a legkisebb közös többszörös meghatározásának a gondolatmenetét.

Jobb csoportban megkövetelhetjük, hogy konkrét számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét elő tudják állítani a számok prímtényezős alakja segítségével, de nem bizonyítjuk általánosan az ezzel kapcsolatos tételeket.

Itt célszerű az *év eleji diagnosztikus felmérést* végrehajtani, ha ilyet terveztünk. A felmérés alapján akár személyre szólóan, differenciált otthoni munkában megtervezhetjük a folyamatos ismétlést, a hiányosságok pótlását.

Egész számok értelmezése, összehasonlítása

Elevenítsük fel, tudatosítsuk, gyakoroltassuk be az 5. osztályban tanultakat.

Derékszögű koordináta-rendszer

A racionális számok számegyenesen való ábrázolásának gyakorlásához kapcsolódva célszerű a derékszögű koordináta-rendszerről tanultakat felelevéníteni. Így nemcsak ezekben az anyagrészekben mélyíthetik el ismereteiket a tanulók, hanem a folyamatos ismétlés során ismételten visszatérhetünk e fogalmak eszközszerű alkalmazására, és mód nyílik széles körű koncentrációra is (*például* függvények grafikonjának megrajzolása, vizsgálata, geometriai transzformációk előkészítése).

Egész számok összeadása, kivonása

Negatív számokra is értelmeznünk kell a négy alapműveletet, de *minimumszinten* nem föltétlenül várjuk el ezek hibátlan végrehajtását. Ugyanakkor minden tanulónak el kell jutnia arra a szintre, hogy a műveletvégzésben tapasztalható hiányosságok ne akadályozzák az egyszerű egyenletek megoldását, amely minimumkövetelmény.

Ötödik osztályban szemlélethez kötöttük a negatív számok összeadását, kivonását. A gyermekek egy része már képes volt elszakadni a szemlélettől, sőt, az általános megfogalmazásig is eljutott. De ez nem volt követelmény. Lerövidítve járjuk végig ezt az utat (a tanulók mintegy egyharmadának kezdetben szüksége van eszközhasználatra is, többségük igényli legalább a tanári demonstrációt), elevenítsük fel, erősítsük meg, rögzítsük a tanultakat. A vizsgálatok azt mutatják, hogy ebben az életkorban *a „szabályok" megtanulása és alkalmazása igen bizonytalan tudáshoz vezet.* A következő évek egyenletmegoldásai és a sorozatok, függvények vizsgálatai során felmerülő „számolási" gondok jelentős része abból ered, hogy a negatív számok összeadását, kivonását nem alapoztuk meg kellően.

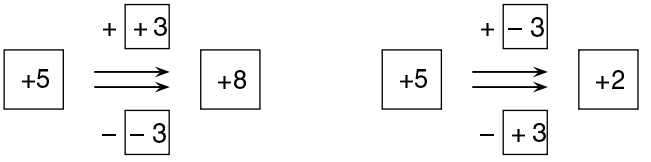
A tanulók előtt váljék világossá, hogy egy szám értékét

egy pozitív szám hozzáadása, illetve egy negatív szám kivonása *növeli*;

egy pozitív szám kivonása, illetve egy negatív szám hozzáadása *csökkenti*;

nulla hozzáadása, illetve kivonása nem változtatja meg.

Az összeadás és a kivonás kapcsolatát mutatja az ábra.



A tankönyv a hatodikos gyermek számára deduktív úton is levezeti az *összeadás és a kivonás általánosítását* az egész számok körére. A gyengébb tanulóktól (osztályoktól) ne várjuk el ennek a végiggondolását, megértését. Ők a konkrét számfeladatok gyakorlása során rögzítsék az összefüggéseket.

Sorozatok hiányzó elemeinek meghatározásában, egyszerű egyenletek megoldásában eszközszerűen alkalmazzuk a tanultakat.

Egész számok szorzása egész számmal

Az előző tanévben esetleg foglalkoztunk negatív számok természetes számmal való szorzásával. Megvizsgáltuk a 0 szerepét a szorzásban, de ez most is megerősítésre szorulhat. Ennek a fejezetnek a célja a szorzás értelmezésének általánosítása negatív szorzóra. A tapasztalat azt mutatja, hogy az általánosítás gondolatmenetét nehéz megérteni, ennek ellenére a „szabályt” jól elsajátítják a gyerekek, ezen a téren általában kevesebbet hibáznak.

A negatív számmal való szorzás nem vezethető vissza az összeadásra, ennek a műveletnek új megállapodás ad értelmet. A megállapodás alapja: a szorzat fogalmát úgy kívánjuk kiterjeszteni, hogy az általánosan értelmezett szorzatnak ugyanazok a műveleti tulajdonságai legyenek, mint a természetes számmal való szorzás esetén (felcserélhetőség, a szorzat változásai stb.). Az általános fogalom ugyanakkor szemléletileg is értelmezhető és elfogadható legyen.

Az **1.** példa szemléletre támaszkodva készíti elő az értelmezést, a **2–3.** példa deduktív úton, a szorzat változásainak szabályát felhasználva értelmezi a negatív egész számmal való szorzást. Az utóbbi műveletsorok eredményeit többféle szempontból elemeztessük a gyerekekkel. Vetessük észre, hogy pozitív számmal való szorzás nem változtatja meg, negatív számmal való szorzás megváltoztatja a szám előjelét.

Vizsgáltassuk meg az előjelet akkor, ha a két tényező előjele megegyezik, illetve különbözik. Engedjük meg, hogy a gyermek a saját szájíze szerint rögzítse az előjelszabályt. Fontosabb az alkalmazásképes tudás, mint a precíz megfogalmazás.

Vizsgáljuk az előjelet többtényezős szorzat esetén, majd erre támaszkodva értelmezzük negatív számok pozitív egész kitevőjű hatványozását (B 33. oldal).

Egész számok osztása egész számmal

Az osztást mint a szorzás inverz (fordított) műveletét értelmezzük. Nincs szükség új műveletdefinícióra, hiszen a hiányzó tényező meghatározásáról van szó.

Az egész számok szorzását és osztását – a törtek tárgyalásával párhuzamosan – folyamatosan gyakoroltassuk (elsősorban otthoni munkában és a házi feladat ellenőrzése során).

Törtek értelmezése
Egyszerűsítés, bővítés

Ha az 5. osztály végére sikerült a törtekkel kapcsolatos alapismereteket megtanítani, és ezeket megnyugtató módon tudják is alkalmazni a tanulók, akkor ennek a feladatsornak csupán megerősítő szerepe van. Fontos *az elnevezések pontos használata, a tört kétféle értelmezése, egyszerűsítése, bővítése, a számegyenesen való biztos elhelyezése.*

Ha az alapismereteket hiányosnak érezzük, akkor a több helyen javasolható rajzos megoldás mellé vegyünk elő eszközt (például színesrudat) is, és próbáljuk meg maradéktalanul pótolni a hiányosságokat. Ebben az esetben több órát szánhatunk ennek a résznek a feldolgozására, mint amennyit a tanmenetjavaslatban megadtunk.

Ha csak néhány lemaradt tanulónk van, akkor velük egyénileg foglalkozhatunk, a többiek közben a matematikai nevelés szempontjából magasabb szintű feladatokat oldhatnak meg (például egyenleteket, érdekes szöveges feladatokat, kombinatorikai feladatokat). Ha nagyobb a lemaradt gyermekcsoport, akkor indokolt a csoportmunka, ahol a jobb tanulók tudnak a gyengébbeknek segíteni, közben maguk is gyakorolhatják a törtekkel való számolást. A közösen végzett gyakorlás kevésbé fárasztó és nem annyira unalmas.

A törtekkel való számolást a legtöbb tanuló nehezen sajátítja el. Még ha érti is, hogy mit kell tennie, akkor is sokszor hibázik a szóbeli számolás és a koncentráló képesség alacsony színvonala miatt. Tegyük hozzá, hogy ezeknek az ismereteknek a gyakorlását nehéz érdekfeszítővé tenni. Ezért *hosszú távra tervezzük meg a gyakorlást,* a követelmények alig érezhető szigorítása mellett. – Az előrehaladás ütemét és a témán belüli súlypontozást az osztály szintjéhez igazítsuk.

Az egyszerűsítést és bővítést, a törtek nagyság szerinti összehasonlítását, rendezését most csak könnyen egyenlő nevezőre hozható törtekkel ismételjük át. Ezt folyamatosan gyakoroltathatjuk a következő anyagrészekre szánt órák során.

Jobb képességű csoportban alkalmazhatjuk a számelméletben tanultakat nagyobb nevezőjű törtekkel végzett műveletekben is (lásd később).

Javasoljuk a **vegyesszámok** tanítását a következők miatt:

jól érzékelteti a tört nagyságrendjét;

jól kapcsolódik az egynél nagyobb törtek tizedestört alakjához;

példát ad a szám többféle alakjára;

általánosan használt alak, a középfokú iskola feltételezi az ismeretét.

Fontos mozzanat a tizedestörtek bővítésének értelmezése.

Mit értünk racionális számon?

A racionális számhalmaz az általános iskolában a legbővebb *tudatosan* használt számhalmaz. A fogalom bevezetésének csak akkor van értelme, ha megmutatjuk, hogy vannak olyan számok is, amelyek nem racionális számok (nem írhatók fel véges vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban). Intuitív szinten tudatosíthatjuk azt is, hogy bár a racionális számok mindenütt végtelenül sűrűn helyezkednek el a számegyenesen, de ott még végtelen sok nem racionális számnak is marad hely.

Megállapodhatunk az alapvető számhalmazok jelölésében (racionális számok: **Q**; egész számok: **Z**; természetes számok: **N**).

Konkrét számokkal vizsgáljuk meg, hogy mely törtek tizedestört alakja véges, illetve végtelen szakaszos. A gyerekek számára önmagában is érdekes, hogy egy egyszerű törtet tízes számrendszerben csak végtelen sok számjegy segítségével írhatnánk fel. Megmutathatjuk, hogy egy végtelen tizedestört végtelen összeget jelent, amelynek (a gyerek számára) meglepő módon véges összege van (végtelen mértani sorok). Ezeket az ismereteket ne követeljük meg, ezekre valamivel magasabb absztrakciós szinten 7–8. osztályban visszatérünk. Fontos azonban, hogy a gyermek lássa, hogyan írhatók fel a racionális számok tizedestört alakban és végtelen sokféleképpen törtalakban. A végtelen sok törtalakhoz kapcsolódóan gyakoroltathatjuk a törtek egyszerűsítését, bővítését, összeadását, kivonását is. Értsék meg a tanulók az alapvető egyenlőtlenségek igazsághalmazának számegyenesen való ábrázolását, a számok ellentettjének és abszolútértékének a fogalmát.

A műveletekkel, valamint a törtekkel és a negatív számokkal kapcsolatosan a szaknyelv pontos használatát követeljük meg. Ha a tanuló pontatlanul fejezi ki magát, azonnal javíttassuk elsősorban vele, ha nem megy, akkor az osztállyal. Mutassunk rá, hogy a pontatlan kifejezés nemcsak „csúnya”, hanem félreérthető vagy értelmetlen is.

Racionális számok összeadása, kivonása

A kis nevezőjű törtek, illetve a tizedes törtek összeadását, kivonását 5. osztályban begyakoroltattuk. Pótoljuk az esetleges hiányosságokat, majd a pozitív törtekről, illetve az egész számokról tanultakat általánosítjuk a racionális számokra úgy, hogy érvényben tartjuk a szűkebb számkörre elfogadott szabályokat. Itt az jelent gondot, hogy egyszerre kell alkalmazni a törtek közös nevezőre hozásáról és a negatív számokról tanultakat.

A bő feladatanyag alkalmas a számolási rutin és a szövegértelmező képesség differenciált fejlesztésére, illetve a folyamatos ismétlés feladatainak a tanulók képességeihez igazodó kiválasztására.

Közös osztó, közös többszörös alkalmazása (Bővített változatban szereplő fejezet.)

Jobb csoportban, gimnáziumi tagozatban, illetve gimnáziumba készülő tanulók esetében elvárható, hogy nagyobb nevezőjű törtekkel is el tudják végezni a műveleteket, illetve a törtek egyszerűsítését. Ehhez alkalmazniuk kell a számelméletben tanultakat.

Időhiány esetén ezekhez a feladatokhoz esetleg a félév végi ismétléskor térjünk vissza.

Racionális számok szorzása
Tört szorzása egész számmal

Tört szorzását természetes számmal ötödik osztályban (és az év eleji ismétlésben) azonos tagok összeadásaként értelmeztük. *Például:*

$$\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3}.$$

Most továbblépünk. Ne elégedjünk meg a szorzás egyik módjának a gyakoroltatásával. A tört szorzását vezessük vissza a hányados változásairól tanultakra is. A hányados értéke n-szeresére változik, ha n-nel szorozzuk az osztandót (számlálót), vagy ha n-nel osztjuk az osztót (nevezőt); ez utóbbi esetben $n \neq 0$. Ezért javasoljuk az **1.128.** feladat frontális munkában történő megoldását, és ezért emeltük ki ott a „kétféleképpen" szót. A feladat megoldásához kapcsolódva vetessük észre, hogy mely esetben célszerű és mely esetben nem a szorzást a nevező osztásával végrehajtani.

Például:

$$\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{6} = \frac{15}{6}, \qquad \text{vagy} \qquad \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5}{6 : 3} = \frac{5}{2}.$$

A törtek szorzásánál gyakran előfordul az a hiba, hogy a tanulók a szorzást „keverik" a bővítéssel. *Például:*

$$\frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5} \qquad \text{helyett} \qquad \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30} \text{ -ot írnak.}$$

Ezért sok példával és ellenpéldával meg kell mutatnunk a kettő közti különbséget.

Az év elején a szorzás értelmezését kiterjesztettük a negatív tényezőkre is, és már ott gyakoroltuk a törtek szorzását tetszőleges egész számmal. Az okozhat nehézséget a tanulóknak, hogy két eljárást (a tört szorzását természetes számmal, valamint a szorzat előjelének megállapítását) kell egyidejűleg alkalmazniuk. Célszerű először a szorzat előjelét meghatározni, s utána alkalmazni a megfelelő szabályt a művelet elvégzésére. További nehezítési fokozat a vegyes számok szorzása negatív számmal.

Ebben a fejezetben javasoljuk a feladatok megadott sorrendben történő megoldatását, mert ez a sorrend egyben fokozatosságot, egymásra építettséget is jelent. (Ez többnyire a többi fejezetben is így van.)

Mindenképpen javasoljuk az **1.129.** feladat feldolgozását, mert nemcsak a tört értelmezését mélyíti el, hanem előkészíti a törtegyütthatós egyenletek megoldását is (azt a lépést, amelyben az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel).

Egész szám szorzása törttel

A törttel való szorzás tanítását két lépésben oldhatjuk meg. Az első lépés egészek szorzása törttel, a második a tört szorzása törttel. Először természetes számok törtrészének kiszámítását tanítjuk meg, amihez nagyon szükségesnek tartjuk a modellezést. Jó, ha a területmodellek, szakaszmodellek, korongok segítségével a tanulók önállóan fedezik fel, hogy: „egy mennyiség törtrészét kiszámíthatjuk úgy is, hogy a mennyiséget megszorozzuk a törttel".

Az **1.** példa segítségével tudatosíthatjuk, hogy a $\frac{3}{5} \cdot 2$ és a $2 \cdot \frac{3}{5}$ első megközelítésben mást jelent. Az egyik szorzat a $\frac{3}{5}$ kétszerese, azaz $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$, a másik a 2 egész $\frac{3}{5}$ része.

Az ábra segítségével felfedezhetik a tanulók, hogy a kétféle értelmezés ugyanarra az eredményre vezet, azaz a szorzat tényezői felcserélhetők.

A megoldott mintapéldákból az is leolvasható, hogy a természetes számot szorozzuk a tört számlálójával, ez lesz az új tört számlálója, a tört nevezőjét pedig változatlanul írjuk az új tört nevezőjébe. Itt is igaz, amit korábban már megállapítottunk, hogy a szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy a tört nevezőjét osztjuk a természetes számmal, de ez zavart okozhat a fogalomalkotás kezdetén, ezért csak akkor hívjuk fel erre a tanulók figyelmét, ha az első módszert már maradéktalanul elsajátították. (Vonjunk párhuzamot a szorzás két fajtája között.)

Az előző fejezetben mondottakhoz hasonlóan itt is analógiát keresünk a negatív számok és a természetes számok törttel való szorzása között, elfogadtatjuk az előjelszabályt különösebb indoklás nélkül.

Tört szorzása törttel

Itt már nem tudjuk a szorzat összegeredetét segítségül hívni, s a törtrész kiszámítása is problémát okoz, mert éppen azt szeretnénk megtanítani, hogyan számíthatjuk ki egy tört törtrészét. Ezért javasoljuk a *területmodellt*, mert így bizonyos részek részeként előáll a szorzat, s a területegységben ezt meg is tudjuk „számolni”. Ezt megerősíti a feladat *következtetéssel* való megoldása. A kettő összehasonlításától várhatjuk, hogy a tanulók önállóan felismerjék az algoritmust.

Háromtényezős szorzat esetén pedig a kockamodellel (**1.136.**) lehet megmutatni, hogy a számlálók szorzatát osztjuk a nevezők szorzatával.

Gyakran van lehetőség a szorzások elvégzése előtt egyszerűsítésre. Mivel ez a tanulók munkáját leegyszerűsíti, ezáltal csökkenti a hibalehetőségeket, érdemes szorgalmazni ezt a megoldást. (Lásd a tankönyv 61. oldalán lévő példát.) Tegyük hozzá, hogy ez a megoldás nagyfokú biztonságot és begyakorlottságot feltételez, ezért hatodik osztályban a szorgalmazás nem jelenthet követelést.

Az egészekre értelmezett szorzást (előjelszabályt) most is kiterjesztjük a törtekre.

Ahogy bővül a műveletek köre, úgy bővül a koncentráció és a folyamatos ismétlés lehetősége is. (Egyenletek, sorozatok, arányosság stb.) A szöveges feladatok tartalma megszabja, hogy milyen számhalmazra értelmezhető az adott feladat. Az ellenőrzéskor erre mindig hívjuk fel a tanulók figyelmét.

Szorzás tizedestört alakú számmal

Kettős feladatunk van. Egyrészt meg kell mutatnunk, hogy a tizedestörttel való szorzásra is érvényes az, amit a törteknél tanultunk, másrészt analógiát kell keresnünk az egészekkel végzett műveletekkel, hiszen így egyszerűbben és gyorsabban végezhetjük el a szorzást. Így tudjuk a rendszerszemléletet, az egymásra építettséget megvalósítani a fogalomalkotásban. Egyikhez szükségünk van arra, hogy a tanulók a véges tizedestör-

teket – készség szintjén – tudják $\frac{a}{b}$ alakú törtté alakítani, és tudjanak 10 hatványaival szorozni, osztani, míg a másik esetben a szorzat változásainak ismerete nélkülözhetetlen. Ha a tanulók tudásszintje megkívánja, területmodellel szemléltessünk, s méréssel is indokoltassuk a kidolgozott mintapéldák műveleteit. Azt is jó tudatosítanunk, hogy ha a téglalap oldalait tizedestörtben adtuk meg, milyen kisebb egységbe célszerű átváltanunk a mértékeket a terület kiszámításához. *Például:* ha $a = 4{,}8$ m; $b = 3{,}5$ m, akkor elég deciméterekké átváltani a mértékeket. Ha viszont $a = 3{,}25$ m; $b = 4{,}2$ m, akkor már centiméterekké alakítjuk az egységet, azaz a $3{,}25 \cdot 4{,}2$ szorzás helyett a $325 \cdot 420$ szorzást hajtjuk végre, azután alakítjuk „vissza" a négyzetcentimétert négyzetméterré. Hasonló a helyzet a többi mértékegységgel is: forint, kilogramm, köbdeciméter stb. (Amikor már nem mértékkel dolgozunk, hanem csak szoroznunk kell, természetesen elég a $325 \cdot 42$ szorzást elvégezni, s a szorzatot ezerrel osztani.)

Mivel ezen anyagrész megtanításához – elvileg – minden részismerettel rendelkeznek a tanulók, ezért célszerű az *önálló ismeretelsajátításra* (megfelelő tanári irányítással) helyezni nagyobb hangsúlyt.

A begyakoroltatásra nem kell sajnálnunk az időt, mert ha a tanulók nem szerzik meg e témakörben a megfelelő rutint, akkor a későbbiek során ez nagyon hátráltathatja matematikai tevékenységüket.

A tanmenetben javasolt két óra nem elég arra, hogy az említett „maximális begyakorlottságot" elérjék a tanulók, de a következő órákon és a hozzájuk kapcsolódó házi feladatokban már eszközszerűen, problémahelyzetben gyakoroltathatjuk a szorzást. Javasoljuk továbbá, hogy *használjuk ki a tanórák néhány első percét is a műveletek gyakorlására.*

A reciprok fogalma

Korábbi dokumentumokban a reciprok erősen kötődött az osztáshoz. Ennek valószínűleg az volt az oka, hogy a reciprok fogalmát – általános iskolában – csak a törttel való osztásnál alkalmazták. Itt találkoztak vele először (s utoljára) az általános iskolai tanulók. Ugyanakkor célszerű eltérnünk a korábbi tankönyvekben található tárgyalási módtól. A reciprok fogalma a törttel való osztástól teljesen függetlenül is tanítható, sőt így talán szerencsésebb, mert ezáltal a fogalmak közti összefüggések is megmutathatók. Nem az a „reciprok" lényeges jellemző jegye, hogy a számlálót és a nevezőt felcseréljük (még ha a törtek esetén ez így is van), hanem az, hogy egy számnak és a reciprokának a szorzata 1. Tehát a szorzás művelete és inverze, az elem és inverze, valamint az egységelem közötti kapcsolatot mutatjuk meg.

Például egy 0-tól különböző a elem inverze $\frac{1}{a}$, mert $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, ahol 1 a szorzás műveletére nézve egységelem. Ezzel a betűkifejezések értelmezését is előkészíthetjük.

Mindezeket természetesen csak kiegészítő anyagként taníthatjuk, és hatodik osztályban az osztással való kapcsolatára helyezzük a fő hangsúlyt.

Racionális számok osztása
Törtek osztása természetes számmal

A törtek természetes számmal való osztását azért szükséges felelevenítenünk, hogy a törttel való osztást kapcsolhassuk a korábbi ismeretekhez. Így a tanuló több oldalról szerezhet olyan tapasztalatot, hogy *az osztás helyettesíthető az osztó reciprokával való szorzással* (ha az osztó nem 0).

Osztás törttel

A bennfoglalás, a következtetési séma, valamint a területmodell segítheti ahhoz a tanulót, hogy ne formális – tartalomtól mentes – fogalmat alakítson ki. A szorzás törttel a törtrész kiszámítása. Az osztás törttel: következtetés törtrészből az egész részre (egységre).

Például: ha egy szám $\frac{4}{5}$ része 2; $x \cdot \frac{4}{5} = 2$, akkor a szám $2 : \frac{4}{5} = x$, azaz egy szám $\frac{4}{5}$ részéből osztással következtethetünk a számra.

Gyakori hiba, hogy az osztó reciproka helyett az osztandó reciprokával szoroznak a tanulók. Erre a hibára is ellenpéldával mutathatunk rá. *Például:*

$$3 : \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{4} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}.$$

Az ilyen hibát valószínűleg az is okozhatja, hogy az „osztandó”, az „osztó” és a „hányados” fogalmakkal nincsenek tisztában a tanulók.

A vegyesszámmal való osztás esetén törtté alakítjuk az osztandót és az osztót, és ezután hajtjuk végre a műveletet.

Osztás tizedestört alakú számmal

A tizedestörttel való szorzáshoz hasonlóan ennél a témakörnél is meg kell mutatni a törtekkel és az egészekkel való analógiát. A hányados változásainak ismerete elengedhetetlen a tizedestörtekkel való osztás tanításához. A tankönyvben is kiemeltük, és itt is hangsúlyozzuk, hogy mindig az osztóban lévő tizedesjegyek határozzák meg a bővítést. (Bár matematikailag helyes, didaktikailag nem ajánlható például a 3,456 : 2,1 = 3456 : 2100 megoldási mód.)

Nehézséget jelenthet az eredmény ellenőrzése szorzással. A maradék nagyságrendjének meghatározása sok tanulónak megoldhatatlan problémát okoz. Ezért tartjuk olyan fontosnak az ellenőrzést, s ezért emeljük ki ilyen mértékben a tankönyvben is.

Tovább bonyolítja a helyzetet, ha kerekítünk. Ekkor fel kell hívni a tanulók figyelmét arra, hogy ha a hányados kerekített érték, ennek ellenőrzésekor is csak kerekített értéket kaphatunk, mégpedig ennek a pontossága kisebb, mint az osztásunk pontossága. (Így a maradék hozzáadása a szorzathoz felesleges.)

Ha század pontossággal dolgoztunk, elképzelhető, hogy az ellenőrzéskor kapott eredmény tized pontosságú lesz csak. Arra is itt hívjuk fel a figyelmet, hogy a *két tizedesjegyig való osztás nem azonos a század pontosságú osztással*. Az utóbbi esetben három tizedesjegyig végezzük az osztást, s századokra kerekítünk.

Kívánatosnak tartjuk ebben a témakörben is a maximális begyakorlottságot, de ezt csak *átgondolt, folyamatos ismétléssel* érhetjük el. Ehhez ad segítséget az **1.175.** feladat. Lehetőség szerint minél többet oldassunk meg belőle, s ellenőrzés után (mintegy további ellenőrzésként) zsebszámológép is használható, de arra most még ügyelnünk kell, hogy ne a numerikus *számolás helyett* használják a tanulók a gépet.

Gyakorlófeladatok.
Törd a fejed! (A bővített változatban szereplő fejezet.)

Bizonyos anyagrészek begyakoroltatásához, elmélyítéséhez, valamint a differenciáláshoz ad segítséget. A fejezetek bő feladatanyagából a tanulók tudásszintjének megfelelően válogassunk. A *Törd a fejed!* című részben több olyan feladat van, amely túlmutat a hatodik osztályos követelményszinten, a jó képességű tanulóknak ajánljuk, míg a gyakorlófeladatok többsége a felzárkóztatást szolgálja.

Figyeljünk fel az *írásbeli műveletvégzés* terén mutatkozó hiányosságokra. Az érintett gyerekeknek egyéni munkában (esetleg tanulópárban), házi feladatként adjunk gyakorlófeladatokat. Azokat, akiknek nincs gondjuk az írásbeli műveletek végzésével, ne terheljük ezek öncélú gyakoroltatásával. Követeljük meg az ellenőrzést. Ezzel az egyenletek „lebontogatással" történő megoldását is előkészíthetjük.

Az egyes feladatok megoldásakor ismételten mutassunk rá a megoldás előtti egyszerűsítés előnyére. Sikerélményt nyújthat a könnyebb megoldás felfedezése.

Vitatott a zsebszámológépek használatának hasznossága.

A tanárok egy része azoknak a tanulóknak sem engedi meg a zsebszámológép használatát, akiknek már nincs gondjuk az írásbeli műveletekkel, egyrészt azért, hogy a gyengébben dolgozóknál ne váltson ki kisebbségi érzést, másrészt úgy vélik, hogy a jókra is ráfér még az írásbeli műveletek gyakorlása. Mások a zsebszámológép használatát az írásbeli műveletek jó elsajátításához kötik, ez motiválhatja az írásbeli műveletek gyakorlását. Végül van olyan álláspont, amely szerint az írásbeli műveleteket és a zsebszámológépek használatát párhuzamosan kell gyakoroltatni.

Egyetérthetünk abban, hogy csak akkor használják a tanulók a zsebszámológépet, ha a műveleti eredményekre képesek jó becslést adni.

A **Törd a fejed** című fejezetben a műveleti sorrendről tanultakat kiegészíthetjük azzal az esettel, amikor a műveletsorban hatványozás is előfordul.

Tudáspróba

Ezeket a feladatokat differenciált egyéni munkában, több részletben célszerű fejlesztő, diagnosztizáló értékeléshez felhasználni. Az eredmények ismeretében tervezhetjük meg a továbbhaladást, a hiányosságok pótlását a folyamatos ismétlés során, az esetleges korrepetálást és a tehetséggondozást.

Ezek a feladatok mintául szolgálhatnak a témazáró mérőlapok tervezéséhez és az értékelési normák kidolgozásához, de nem építhetjük be őket változatlanul a dolgozatba, mert az így nyert információk félrevezetők lennének a tanulók teljesítményét illetően.

2. A geometriai alakzatok vizsgálata

A geometria a tananyag mintegy 30%-át teszi ki, ami összhangban van az évi óraszám geometriára fordítható részével. A bő terjedelem oka többek között az, hogy az előző öt évben szerzett tapasztalatok, ismeretek közül szinte valamennyit tárgyalja a könyv oly módon, hogy a tanultak felelevenítése mellett az esetleges tudásbeli, szemléletbeli hiányok pótlását is lehetővé teszi. A 10–12 éves tanulók gondolkodási képessége, geometriai szemlélete annyira különböző, hogy szükséges ilyen szinten biztosítani az átfedést a korábbi évek és a 6. osztály geometriaanyaga között.

A tanulók 5. osztályban ismerkedtek meg a szög fogalmával. Mértek szöget alkalmi mértékegységekkel és szabvány egységekkel. Használták a szögmérőt szögek mérésére, megrajzolására. Háromszögek és egyéb sokszögek belső szögeit mérték, sejtéseket fogalmaztak meg a háromszög belső szögeinek összegével kapcsolatosan. Megismerkedtek a sokszöggel mint gyűjtőfogalommal („a háromszöget, négyszöget, …, sokszögnek nevezzük”).

Győződjünk meg arról, hogy a korábban tárgyalt geometriai fogalmak, egyszerű szerkesztések, a szögekről, a sokszögekről, a speciális négyszögekről, a tér- és síkelemek kölcsönös helyzetéről tanultak mennyire érettek, felelevenítés nélkül felhasználhatók-e, vagy még tovább kell azokat gyakoroltatni. Ha úgy látjuk, hogy az alapvető ismeretek nem váltak eszközjellegűvé, akkor azt most egyszerűbb feladatok megoldatásával gyakoroltathatjuk.

Egyszerű feladatokat, szükség esetén, az óra eleji folyamatos ismétléskor is adjunk. Ezek *ne legyenek időigényesek, segítsék az emlékezetbe való bevésést és a begyakorlást,* hogy az összetettebb feladatok megoldásakor ezekre ne kelljen külön figyelmet fordítanunk.

Törekedjünk arra, hogy minden ismételt és új fogalom sokféle szemléletes élményre alapozódjon. Különösen fontos ebben a korban a térbeli alakzatok szemléltetése. Minden részben van 1-2 ilyen feladat, de ennél sokkal több alkalmat kell találni (a kéznél levő eszközök felhasználásával) a térszemlélet fejlesztésére, hiszen a térelemek síkbeli rajza a gyerek számára sokszor félrevezető.

Itt is hangsúlyozzuk, hogy ha a feladat megoldása mérést igényel, akkor a könyv ábráiról vagy a füzetben készített rajzokról a szakaszok hosszát milliméter pontossággal, a szög nagyságát fok pontossággal mérjük. Ha a mért adatokkal számítást is végzünk, akkor az eredményt úgy kerekítsük, hogy az értékes jegyek száma ne haladja meg a komponensek értékes jegyeinek számát.

Az előző években tanultak ismétlésekor minden esetben tovább is lépünk. Egyre tudatosabban törekszünk a szerzett tapasztalatok, *a megismert tulajdonságok összegyűjtésére, rendszerezésére, megfogalmazására.* A tankönyvben a megfogalmazások érthetősége igazodik a tanulók életkori sajátosságaihoz, ezért lehet, hogy nem mindegyik teljes, de nem mondhatnak ellent a később tanulandóknak. Általában *nem definiálunk, hanem minél több tulajdonság „felfedeztetésére”, összegyűjtésére törekszünk.* 6. osztályban még nem tárgyaljuk az alapfogalmak, alaptételek (axiómák) körét sem, de ráirányítjuk a gyerekek figyelmét ezekre a megállapodásokra.

Az általános iskola 6. osztályában nem követelhetjük meg, hogy minden gyerek **bizonyítsa** az összefüggéseket. Ugyanakkor a tankönyv egyes fejezetei lehetőséget biztosítanak a helyes matematikai szemléletmód alakítására, a tulajdonságok és összefüggések gyermek szintjén történő igazolására, így a *bizonyítási igény felkeltésére* és a későbbi *magasabb szintű tárgyalás előkészítésére*. A tananyag kiválasztásakor, az osztály színvonalának figyelembevételével gondoljuk át, hogy mennyit és milyen mélységben dolgozunk fel ezekből a részekből.

Tartsuk szem előtt, hogy a feltételek optimális biztosítása, a tananyag kiválasztása a tanár joga és kötelessége.

Ne akarjunk mindent újból tanítani. Vizsgáljuk meg, hogy melyek azok az anyagrészek, amelyeket 5. osztályban kevésbé sikerült begyakoroltatnunk, ezekre szánjunk több időt. A korábban már kellően megszilárdított ismereteket (esetleg egy-egy ismétlő feladattal felfrissítve) azonnal eszközszerűen használhatjuk az új anyag megtanításához.

Nem lehet mindenkinek mindent megtanítani. Az 5. és a 6. osztályban tanított geometriai ismeretekhez a 7. és a 8. osztályos tankönyv (a tananyag „spirális" felépítése folytán) újból és újból visszatér. Ez a visszatérés a pontosítás és a kibővítés igényével történik, de lehetőséget ad az esetleges hiányok pótlására is. Például a tanulók később is tanulnak a szögekről, sokszögekről. Ezért az itt tárgyalt fogalmak, ismeretek elsajátítása *nem fejeződik be.*

Ne akarjunk minden feladatot mindenkivel megoldatni. A tankönyv feladatai lehetőséget biztosítanak a tananyag különböző szintű megközelítésére és feldolgozására. Válasszuk ki a konkrét osztály fejlettségének és saját elképzeléseinknek leginkább megfelelő feladatokat. A tanultak begyakorlása során differenciáljunk, minden tanuló a fejlettségének optimálisan megfelelő feladatsort kapja. A gyengébb összetételű osztályokban elégedjünk meg a továbbhaladáshoz feltétlenül szükséges ismereteket rögzítő feladatok megoldásával, az elemi szerkesztési lépések begyakorlásával. Az összetettebb szerkesztésekre, a bizonyításokra, a kombinatorikai feladatok megoldására később is vissza-visszatérhetünk, például differenciált házi feladat adásával.

Válasszuk meg a tanulók életkori sajátosságainak és az osztály színvonalának leginkább megfelelő módszereket. Az összefüggések feltárására a kiscsoportokban vagy tanulópárokban folyó, a tanulók aktív tevékenységére építő, alkalmasan megválasztott feladatsorral irányított „felfedeztetést" javasoljuk. Ne riasszon vissza bennünket a kísérletezés és az eszközhasználat időigénye sem. Az így eltöltött idő bőségesen kamatozni fog a térgeometria tanítása során. A felismert összefüggések tudatosítása, az ismeretek rögzítése frontális munkában lehet a leghatásosabb. A tanulók tudásának és képességének polarizáltsága miatt a tanultakat differenciált egyéni munkában célszerű gyakoroltatni.

Mind a meglévő, mind az új ismeretek feldolgozása lehetőséget biztosít a többi témakörrel való optimális kapcsolódásra, összeszövésre. Például azzal, hogy a geometriai alakzatokat ponthalmazoknak tekintjük, igen sok alkalom adódik a halmaz, logikai ismeretek megszerzésére, a halmazszemlélet fejlesztésére. Vizsgálunk különböző geometriai relációkat. A koordináta-rendszer alkalmazása a feladatokban sokféle kapcsolódást biztosít. A terület-, a felszín-, a térfogatszámítások alkalmasak a műveletek tulajdonságainak, összefüggéseinek mélyítésére. Egyes feladatokban, elsősorban szemléletfejlesztő céllal, megjelenik a kombinatorika is.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Az alapvető geometriai ismeretek ismétlése, bővítése; térelemek kölcsönös helyzetének vizsgálata.
2. A körrel kapcsolatos fogalomrendszer tudatosítása.

   A szakasz felezőmerőlegesének fogalma, megszerkesztése.

   Ismerkedés a *szerkesztési feladatok* megoldásával.
   A tananyag elsajátítása és a feladatok megoldása során törekvés:

   a mérés pontosságára;

   a rajzeszközök helyes használatára;

   a gondos, esztétikus, áttekinthető szerkesztésre.
3. A szöggel kapcsolatos fogalomrendszer ismétlésével párhuzamosan a korábban tanultak kibővítése, pontosabbá tétele. A középponti szögekről tanultak alkalmazása szerkesztési feladatokban: *szögfelezés, szögmásolás,* nevezetes (30°-os, 45°-os stb.) szögek szerkesztése.
4. Sokszögek tulajdonságainak vizsgálata.
   Háromszögek belső szögeinek összege, háromszögek külső szögei.

   Egyszerű *összefüggések igazolása, bizonyítása* hatodik osztályos szinten. Ennek kapcsán a bizonyítás elmondása, leírása, a szaknyelv helyes használatára nevelés.
5. *Speciális négyszögek* értelmezése, tulajdonságainak vizsgálata.
6. *Testek építése, ábrázolása, vizsgálata.*

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika, kombinatorika

Állításokhoz részhalmaz kiválasztása, ha adott az alaphalmaz (kapcsolat a nyitott mondat igazsághalmazával). Állítások igazságának eldöntése. Ponthalmazok. Adott halmazokról (részhalmazokról) igaz állítások megfogalmazása. A „van olyan”, a „minden” *kvantor,* továbbá a „ha …, akkor” *logikai művelet* alkalmazása. A halmazműveletekről tanultak felelevenítése. A háromszögek különböző szempontok szerinti csoportosítása példát, illetve ellenpéldát ad az *osztályozásra,* segíti a részhalmaz fogalmának kialakítását.

Szinte minden szerkesztési feladat diszkussziója kombinatorikai szemléletet igényel. Ezen túlmenően vannak konkrétan is (nem szokványos) kombinatorikai jellegű feladatok. (**2.86., 2.88.; B2.13–B2.15.**)

Számtan, algebra

A szögek mérése alkalmat ad *a törtekkel való műveletek* gyakorlására. A középiskolában tanulandók előkészítése mellett elsősorban ezért tartjuk fontosnak az egyenesszög

egységként való kezelését. Az egyenesszögben kifejezett szögek átváltása fokokra jó gyakorlási lehetőséget ad a törtrész kiszámítására. A törtfogalom megerősítését és az algebrai kifejezések értelmezését is szolgálják a szögfelezéshez és másoláshoz kapcsolódó feladatok.

A nyitott mondat fogalmának ismétlése. A háromszög belső szögeinek összegével kapcsolatos egyenletek megoldása.

A geometriai tananyag feldolgozásával párhuzamosan, *folyamatos ismétlésként* újra és újra térjünk vissza a racionális számokkal végzett műveletek gyakorlására.

Relációk, függvények, sorozatok

Egybevágósági reláció; párhuzamosság, merőlegesség; kisebb, nagyobb (távolság).

A derékszögű koordináta-rendszerben adott alakzatok vizsgálata a pontok ábrázolásának gyakorlása mellett előkészítheti a függvénytranszformációt is. A függvényszemlélet fejlesztéséhez kapcsolódik például a háromszög, négyszög, ötszög ... átlói számának meghatározása.

A geometria egyéb témakörei

Koordináta-geometriai vizsgálatok, geometriai transzformációk előkészítése.

Tanmenetjavaslat

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
1–2. **1–2.**	*Geometriai alapismeretek.* Az Eszközeink használata című olvasmány megbeszélése. Alakzatok előállítása, megfigyelése, csoportosítása síkban és térben. Ponthalmazok távolsága. Egyszerű szerkesztések *A térelemek kölcsönös helyzete,* megfigyelésük többféle testen. Állítások igazságának eldöntése. Alakzatok vizsgálata derékszögű koordináta-rendszerben. Adott tulajdonságú ponthalmazok. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása.	Tk. 2.01–2.24.; B2.12–B2.15., B2.23–B2.27.; Gy. 8.01–8.04., Fgy. 6.2.02–07., 6.2.11–13.
3. **3.**	*A kör. A kör húrja, érintője.* A körről tanultak rendszerezése. A körvonal és a körlemez mint adott tulajdonságú ponthalmaz; körcikk, körszelet. A húr és az érintő néhány tulajdonsága. Adott tulajdonságú ponthalmazok. Az alapszerkesztések gyakorlása, szerkesztési feladatok megoldása. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása.	Tk. 2.25–2.31., B2.19.; Gy. 9.46.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
4–5. **4–5.**	Ismerkedés a szerkesztési feladatok megoldásával. Háromszög szerkesztése három oldalából. *A szakasz felezőmerőlegese;* szakaszfelezés, merőleges egyenesek szerkesztése. Téglalap megszerkesztése. Adott tulajdonságú ponthalmazok; ponthalmazok közös része. Távolságmérés. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása.	Tk. 2.32–2.36.; Fgy. 6.2.14–19., 6.2.26.
6. **6.**	A *szögmérésről tanultak ismétlése.* A szög értelmezése többféleképpen. A szög fajtái; mérése; mértékegységek: egyenesszög; fok. A szögmérő használata. Halmazok, logika; törtek; időmérés; koordináta-rendszer. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása.	Tk. 2.37–2.41., Gy. 8.12–8.16.; Fgy. 6.2.21–22., 6.2.25.
7. **7–8.**	Középponti szögek, *szögmásolás, szögfelezés.* A középponti szögek összehasonlítása ugyanabban a körben, megegyező sugarú körökben. Szög törtrészének megszerkesztése szögfelezéssel, szögmásolással. Törtek. A körről tanultak alkalmazása. Algebrai kifejezések. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása.	Tk. 2.42–2.46.; Fgy. 6.2.23–24., 6.3.06.
8. **9–10.**	Ismerkedés a sokszögekkel. *A sokszög tulajdonságainak vizsgálata.* Konvex, nem konvex sokszögek. Az oldalak, csúcsok, átlók száma. Sokszögek osztályozása adott, illetve a tanuló által felismert szempontok szerint. Síkbeli alakzatok egymáshoz való viszonya. Kapcsolat a kombinatorikával. Halmazok közös része, egyesítése, részhalmaz. Állítások igazságának eldöntése. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása.	Tk. 2.47–2.49.; B2.16–B2.17.; Gy. 8.17–8.20.; Fgy. 6.3.04.
9–10. **11–12.**	*Háromszögek.* Elnevezések a háromszögekben, belső szögeinek az összege. Háromszögek csoportosítása különböző szempontok szerint. Háromszögek szerkesztése. Szabályos háromszög, illetve a 60°-os szög szerkesztése. 60°-os szög törtrészeinek szerkesztése. (Kiegészítő szögek.) Kapcsolat a mérőszám és a mértékegység között. Állítások igazságának eldöntése. Szögfelezés, szögmásolás. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása.	Tk. 2.50–2.61.; B2.20–B2.21.; Gy. 8.22–8.26., 8.50–8.51.; Fgy. 6.3.07–10., 6.3.12–14., 7.5.01–02.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
– **13–14.**	*Jobb csoportban:* Sokszögek belső szögeinek összege. A háromszögek külső szögei. Összefüggések a háromszög belső és külső szögei között. A külső szögek összege. Elfordulás. Egyenletek. A háromszög belső szögeinek összege.	Tk. B2.01–B2.11.
11–12. **15–16.**	*Trapéz, paralelogramma, téglalap, rombusz.* Négyszögek csoportosítása különböző szempontok szerint. Halmaz, logika. Szögmérés. Derékszögű koordináta-rendszer.	Tk. 2.62–2.74.; B2.28–B2.29.; Gy. 8.63–8.66.; Fgy. 6.3.15–30.
13. **17.**	**3. felmérés**	Felmérő feladatsorok
14. **18.**	*Testek építése, testek ábrázolása, tulajdonságaik vizsgálata.* Testháló. A téglatest vizsgálata. A téglatest felszíne, térfogata. Kombinatorika.	Tk. 2.75–2.82.; Gy. 7.73., 7.78., 7.83., 7.88.; Fgy. 6.5.10–11., 7.5.03.,7.5.05–08.
15–16. **19–21.**	Összefoglalás, gyakorlás. A 3. dolgozat értékelése, a hiányosságok pótlása. *Fejlesztő, diagnosztizáló értékelés.*	Tk. 2.83–2.92.; B2.30.; Gy. 7.47–7.56., 9.44–9.45., 10.02.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Eszközeink használata

A *Hajós*-idézetben 12 éves gyerek számára is érthetően megfogalmazott, hogy *a szerkesztés megbízhatósága függ a használt eszközök pontosságától és a munkánk gondosságától.* Hasonlítsuk össze az eszközökkel kapcsolatos elvárásokat a gyerekek eszközeivel. Mutassunk példát jó eszközre, s mutassunk hibásat is.

Ne sajnáljuk az időt arra, hogy pontról pontra megbeszéljük a szerkesztési lépéseket; hajtsák is végre a gyerekek többször egymás után. Később konkrét szerkesztési feladatok kapcsán utaljunk ezekre a lépésekre. Ha ötödik osztályban megköveteltük a precíz szerkesztést, akkor most már csak egy-két tanulót kell figyelmeztetnünk erre. Ha már év elején sikerül felismertetni a tanulókban a gondos munka szépségét és örömét, akkor nagy előnyt szerzünk az egész évi geometria-tananyag feldolgozásához. A gondos, áttekinthető tervet, szerkesztést állandóan követeljük meg a tanév folyamán.

Ismételjük át a párhuzamos és a merőleges egyenesek szerkesztését derékszögű és egyenes vonalzóval.

Geometriai alapismeretek

Feltétlenül szükséges, hogy a gyerekek *minél többféle testet vizsgáljanak.* Az előző évfolyamok által készített és begyűjtött testek is alkalmasak erre. Ez a vizsgálódás egyénileg, páronként vagy csoportokban történhet attól függően, hogy hány testet (nem feltétlenül különbözőt) tudunk a kezükbe adni. Az lenne a leghasznosabb, ha minden gyereknél lenne legalább egy.

A tulajdonságok megállapításához adjunk szempontokat – tudatosan használva a szaknyelvet. *Például:*

Hány lapja, éle, csúcsa van a testnek? Milyen lapok határolják?

Van-e a lapok között egymással párhuzamos, egymásra merőleges?

Egy-egy csúcsban hány él fut össze? A szomszédos élek milyen szöget alkotnak?

Buzdítsuk őket, hogy önállóan megfogalmazott szempontok szerint is végezzék el a vizsgálatot.

Néhány gyerekkel *soroltassuk el az általa megfigyelt tulajdonságokat.* Szabad vitában engedjük meg a felsorolt tulajdonságok kiegészítését, pontosítását. Nagyon sokat beszéltessük a tanulókat. Fokozatosan érjük el, hogy minél rövidebben és minél pontosabban fejezzék ki gondolataikat. Érjük el azt is, hogy türelmesen odafigyeljenek társaikra, legyenek képesek követni, értelmezni és értékelni társaik gondolatait. Ez most is és a későbbiekben is nagyon fontos. Az összetett geometriai feladatok megoldásakor az összefüggések feltárása és a lépések indoklása nemcsak szilárd matematikai – azon belül geometriai – fogalmakat tételez fel, hanem a terminológia használatára és megértésére épülő beszédkészséget is igényel.

A **2.01.** feladat megoldása előtt kérdezzük meg, hogy van-e a feladathoz tartozó ábrán olyan test vagy ahhoz hasonló, mint amilyen a kezükben van. Hogyan rajzolnák le a kezükben lévő test képét?

A geometria tanulásának egyik akadálya, hogy térbeli alakzatokat síkban kell ábrázolni, és síkban ábrázolt alakzatot kell térben megjeleníteni. Ez a képi gondolkodás megfelelő szintjét igényli. Az a tapasztalat, hogy ennek a fejlesztése ebben az életkorban még eredményes lehet, de a következő években már egyre kevésbé; különösen a lányoknál fontos erre gondolni, náluk előbb befejeződik a fejlesztés lehetősége. A gyerekek jelentős része szakmunkás lesz, műszaki pályára kerül, ehhez nélkülözhetetlen a megfelelő képi gondolkodás.

A tankönyvnek ez a része olyan geometriai ismereteket tartalmaz, amelyek mindegyikével már találkoztak a gyerekek, de fontosnak tartjuk, hogy így felépítve, rendszerezve most is foglalkozzunk velük. Az itt összegyűjtött *definíciókhoz* később is vissza lehet lapozni, és fokozatosan megkövetelhetjük, hogy a gyerekek önállóan is *szabatosan* megfogalmazzák ezeket.

A feladatok megoldása során a koordináta-rendszerről, sokszögekről, területszámításról tanultakat is felelevenítheti, gyakoroltathatjuk. Valamennyi feladat megoldására most nem kerülhet sor, válogatnunk kell. Esetleg a későbbiek során némelyikre visszatérhetünk.

A térelemek kölcsönös helyzete

Geometriatanításunknak hosszú idő óta gyengéje a térszemlélet fejlesztése. Az a tapasztalat, hogy középiskolában, felnőttkorban már alig fejleszthető. Az ok az általános iskolai geometriatanításban is kereshető. A 10–14 éves gyerek képi gondolkodása még ezekben az években fejleszthető, úgy látszik, hogy később már kevésbé. Ezért kell minden lehetőséget felhasználni a konkrét térrészek, testek vizsgálatára.

A **2.11–2.17.** feladat tényleges térbeli tevékenységet igényel, többféle eszközzel, különböző színvonalon, más-más oldalról megközelítve a problémakört. Minden gyerek saját maga (esetleg tanulópáronként) állítsa elő az alakzatokat, és végezze az adott szempont szerinti megfigyeléseket. A témakör tárgyalásának előkészítéseként célszerű otthoni munkában *különböző testeket építtetni* (a téglatesten, kockán kívül más testet is), és ezeket is bevonni a megfigyelésekbe. A tapasztalatszerzésnek ez a közvetlen módja semmilyen demonstrációval vagy magyarázattal nem pótolható. *A térszemlélet csak tényleges térbeli tevékenységgel fejleszthető!*

A **2.18–2.20.** feladat szoros kapcsolatban van a kombinatorikával, ugyanakkor megoldásukkal igen sok geometriai tapasztalat is szerezhető.

A **2.21–2.24** feladat téglatesten vizsgálja a térelemek kölcsönös helyzetét, mert egyéb test síkbeli rajzán nemcsak a hosszúságarányok, hanem még a helyzetek sem érzékelhetők jól. A feladatokat célszerű kiegészítenünk azzal, hogy a tanulók próbálják meg vázlaton is megjeleníteni az utasításokat. (A térbeli viszonyok síkbeli megjelenítése a későbbi években is sok gondot okoz a gyerekeknek.) Fontos, hogy a téglatesteken kívül más testekkel is végezzenek hasonló vizsgálatokat a gyerekek.

Ebben a témakörben támaszkodhatunk a technika- és a rajzórákon tanultakra.

A kör. A kör húrja, érintője

Ez a rész még hozzátartozik a geometriai alapismeretekhez, de már kiegészül a *húr* és az *érintő* fogalmával, azok néhány tulajdonságával is. Azért került az ismétlő részhez, mert a távolságról, a ponthalmazokról, a geometriai szerkesztésekről tanultak itt frissen és sokféleképpen alkalmazhatók, gyakorolhatók, és elsajátíttathatjuk a körző és vonalzó helyes használatát. Ezekre az ismeretekre építünk az 5. fejezetben. Az elmondottak ellenére a gyengébb felkészültségű osztályokban redukálható a tárgyalás a legszükségesebb ismeretek felelevenítésére, értelmezésére és rendszerezésére.

A körrel kapcsolatban ne csak azokat az ismereteket elevenítsük fel, amelyekkel az előző évben találkoztak a gyerekek, hanem azokat a tevékenységeket is, amelyekkel az ismereteket tanulták.

Egy-egy állítás megfordíthatóságának vizsgálatát meg kell tanulni. Ez olyan absztrakciós gondolkodást igényel, amely megfelelő közvetlen tapasztalatok nélkül nehezen alakítható ki.

Az *érintőt* nem általában, hanem csak a körrel kapcsolatban definiáljuk. Megsejtethetjük, hogy az érintő a szelő határhelyzete. A tananyag mennyisége és a tanulók absztrahálóképessége nem engedi meg, hogy az analízisből ismert fogalomról is szó legyen. A „törésmentes átmenet” kiemelésével a későbbi érintőfogalmat készíthetjük elő. Tudatosítsuk, hogy *az érintőt nem rajzolhatjuk meg találomra, előbb meg kell szerkesztenünk az érintési pontot.*

Szerkesztések

Az 5. osztályban tanultak felelevenítése, gyakorlása, kibővítése.

A tanulóknak a következőket kell megsejteniük (**2.23.** feladat):

Az A-tól és a B-től egyenlő távolságra lévő pontok egy egyenesre illeszkednek.

Az AB szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van az A, illetve a B ponttól. A sík más pontjai vagy az A ponthoz, vagy a B ponthoz vannak közelebb.

Az AB szakasz felezőmerőlegesének megszerkesztéséhez elegendő két pontját meghatároznunk.

Nem elég, ha a szakasz felezőmerőlegesének fogalmát „felfedezi" a tanuló. Különböző feladathelyzetekben gyakoroltassuk a szerkesztési eljárást, illetve szilárdítsuk meg a fogalmat. Ezért foglalkozunk a merőleges egyenesek, majd ezen szerkesztési eljárásokat alkalmazva a téglalapok szerkesztésével. Jó alkalom adódik a szakaszfelező merőleges szerkesztésére majd a tengelyes tükrözéssel kapcsolatosan is.

A szögmérésről tanultak ismétlése

A „szög" szót a következő jelentésekben használhatjuk:

1. *A szög mint szögvonal:* egy adott pontból kiinduló két félegyenes szöget (szögvonalat) alkot.
2. *A szög mint szögtartomány:* a síknak olyan része, amelyet egy pontban találkozó két félegyenes határol. A szög szárai a síkot két szögtartományra bontják. Ezek közül azt, amelyik a szög szárait összekötő szakaszokat tartalmazza, belső tartománynak szokás nevezni, a másikat külső szögtartománynak. Az így kapott szögtartományok végtelenbe nyúlók, nem korlátosak. A belső szögtartomány az egyenesszögnél nem nagyobb, tehát konvex. Az egyenesszögnél nagyobb szög nem tartalmazza a szárait összekötő szakaszokat, tehát nem konvex szög.

   Különbséget teszünk a szögvonal és a szög mint szögtartomány, mint a sík egy része között. Ha a szög valamelyik értelmezését hangsúlyozni akarjuk, akkor külön kiemeljük. Ez hasonló például ahhoz a megállapításhoz, hogy a körön körvonalat és körlapot is érthetünk.

3. *Szög mint tágasság:* szögtartomány *mértéke.* Mennyiség, amelyet többféle mértékegységgel is kifejezhetünk. A tágasság, a szögtartomány mértéke teljesszögnél nagyobb is lehet. Például az ötszög belső szögeinek összege 540°.

   Értse meg a gyerek, hogy a szög méréséhez bármilyen szögtartományt választhatunk egységül, például derékszög-, egyenesszög-, teljesszögtartományt. Hiba, ha a szög fogalma egy mértékegységhez, például a fokhoz kötődik. A későbbi geometriai tanulmányok miatt az egyenesszöget a π (pi) görög betűvel jelöljük. Mivel úgyis görög betűkkel jelöltük a szögeket, ez a gyerekeknek nem jelent gondot.

4. Nem foglalkozunk a *forgásszög, irányított szög* fogalmával. Ez is mennyiség, de irányított mennyiség. Az elfordulás lehet pozitív és lehet negatív. Az elforgatás abszolútértéke a teljesszögnél nagyobb is lehet.

   Ha a síkra egyik oldaláról nézünk, akkor azt a forgásirányt szokás pozitívnak választani, amelyik arról az oldalról nézve az óramutató forgásával ellentétes. Ezért a pozitív forgásirány megadásával azt is

megadtuk, hogy a síkot melyik oldalról nézzük. Az elmondottakat a gyerek számára fóliára rögzített, rajzolt óramodellel tehetjük szemléletessé.

Ha a tanulók még nem gyakorolták be kellően a szögmérést és a szög megrajzolását, akkor a következőket javasoljuk:

Adott szögek közül válasszák ki a különböző fajta szögeket, becsüljék meg ezek nagyságát (90°-nál kisebb; 90°-nál nagyobb, de 180°-nál kisebb; stb.).

Becsüljék meg adott hegyesszögek, majd tompaszögek nagyságát, méréssel ellenőrizzék a becslést. Rajzoljanak adott nagyságú hegyes- és tompaszögeket.

Becsüljék meg, majd mérjék meg adott homorúszögek nagyságát. Rajzoljanak adott nagyságú homorúszögeket.

Ha a szögmérést tanulóink többsége már 5. osztályban kellően elsajátította, akkor a tanultak felelevenítésére és kibővítésére elegendő egy órát szánnunk. Ebben az esetben a felszabadult órát a geometriai szerkesztések gyakorlására tartalékolhatjuk.

Középponti szögek, szögmásolás

A középponti szögek tárgyalása azért szükséges, hogy a gyermek megértse és tudatosan alkalmazza a *szögmásolást* és a *szögfelezést*. Ha szükséges, sok hasznos gondolatot átismételhetünk, újabb oldalról is feldolgozhatunk: a szögméréssel és a körrel kapcsolatos ismereteken túl a szakasz felezőmerőlegesének fogalmát, a törteket stb. Ebben az esetben, a tanmenetjavaslattól eltérően, két órát szánjunk ennek a résznek a feldolgozására. Átlagos vagy átlagosnál jobb osztályban kellően megszilárdíthatjuk az itt tanultakat a 60°-os szög törtrészeinek a megszerkesztése során (lásd tanmenetjavaslat).

A gyerekek tapasztalatot szerezhetnek a húrnégyszögekkel, a szabályos sokszögekkel, a tengelyes szimmetriával, forgásszöggel kapcsolatban. Így realizálódhat például a szögekről tanultak alkalmazása és *a transzformációk előkészítése* is. Jobb összetételű osztályban felkelthetjük az igényt az egyszerű bizonyítások, igazolások iránt.

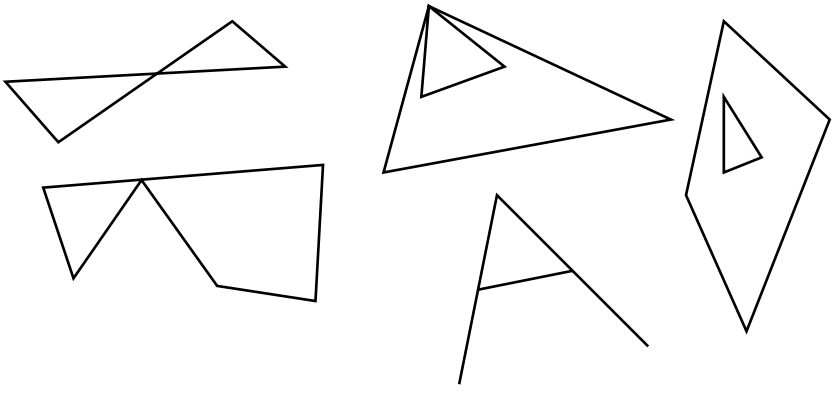
A szögfelezést a tankönyv a szakasz felezőmerőlegesének szerkesztésére vezeti vissza. Dönthetünk úgy is, hogy ezzel a fogalommal csak a tengelyes tükrözés tárgyalása során foglalkozunk.

Ismerkedés a sokszögekkel

A síkidom tágabb értelmezéséből indulunk ki, nem csak a korlátos síkrészeket tekintjük annak. Ha a síkot vonalakkal feldaraboljuk, akkor síkidomokat kapunk, például a félsík is síkidom, az egy pontból kiinduló két félegyenes által alkotott szögtartományok is.

A sokszöget kétféleképpen értelmezzük: mint a síknak záródó töröttvonallal határolt része (sokszöglap), és mint csak a záródó töröttvonal (sokszögvonal). Amelyiket hangsúlyozni akarjuk, azt kiemeljük úgy, hogy pontosabban megnevezzük.

Csak az egyszerű sokszögekkel foglalkozunk, lásd a tankönyvben felsorolt tulajdonságokat. *Például* nem (egyszerű) sokszögek láthatók az ábrán.



A sokszög tulajdonságait beszéljük meg részletesen, mutassunk minél több ellenpéldát. A szerzett tapasztalatok alapján összegyűjtjük a négyszögek, speciális négyszögek tulajdonságait, de a pontos meghatározásukat és az abból következő tulajdonságokat csak 7. osztályban követeljük meg.

A konvex síkidomok tárgyalására aszerint szánjunk több vagy kevesebb időt, hogy az elmúlt évben mennyire foglalkoztunk ezzel a fogalommal. A síkidom tágabb értelmezéséből következően a konvex szögtartomány is konvex síkidom.

Érjük el, hogy a konvex, illetve a nem konvex sokszög tulajdonságait önállóan „fedezzék fel" a gyerekek. Figyeljünk oda, hogy az „egyenes vágáson" egyenessel történő – végtelen – vágást értsenek. Felismertethetjük, hogy ugyanazt a fogalmat többféleképp is értelmezhetjük: a konvex sokszögnek három, egymással ekvivalens értelmezését adja a tankönyv.

Az osztály színvonalához és a rendelkezésre álló időhöz igazodva mélyedjünk el az **1.** és a **2.** példa feldolgozásában, a gondolatmenetek elemzésében. Az általános összefüggések „megtanulását" semmiképp se várjuk el. *Ezeknek a példáknak az elsődleges célja nem a matematikai gondolatok átadása, hanem a matematikai gondolkodás fejlesztése.* Gyengébb osztályokban a példák feldolgozásával várhatunk egy évet.

Háromszögek

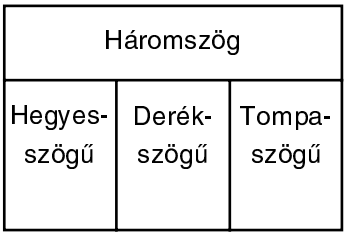
A háromszögek tárgyalását előkészítő feladatokon felelevenítheti az alapismereteket és a szögekről tanultakat. Gyakoroltathatjuk az eszközök használatát, rajzról az adatok mérését, lejegyzését.

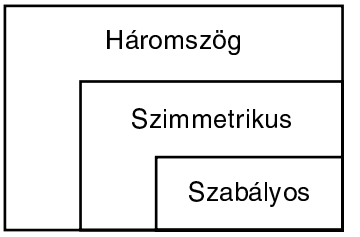
A háromszög belső szögeinek összegéről hajtogatással, méréssel, tépéssel már 5. osztályban is szereztek a gyerekek tapasztalatokat. Most ezt az összefüggést parkettázással erősítjük, és majd 7. osztályban a párhuzamos szárú szögek ismeretében bizonyítjuk.

Jobb csoportban a háromszög belső szögeinek összegéről tanultakat alkalmazhatják számításos és szerkesztési feladatokban. *Előkészítő jelleggel megfigyeltethetjük* a négyszög belső szögeinek összegét, a trapéz egy száron fekvő szögeit, illetve a paralelogramma szomszédos és a szemben fekvő szögeit is.

A háromszögek csoportosításával kapcsolatosan vetessük észre, hogy a szögek szerinti csoportosítás (osztályozás) esetén három olyan részhalmazt kapunk, amelyeknek nincs

közös elemük. Az oldalak szerinti csoportosítás (nem osztályozás!) egy részhalmazlánccal szemléltethető.





A feladatok között több olyan van, amelynek 0 megoldása van. Fogalmaztassuk meg, miért nincs megoldás, melyik adatot és hogyan kellene megváltoztatni, hogy legyen. Olyan feladatok is vannak, amelyeknek több, esetleg végtelen sok megoldása van. Megkérdezhetjük, hogyan változtassuk az adatokat ahhoz, hogy pontosan egy megoldás legyen.

A **B2.01.** feladattal gyakoroltathatjuk a szöveges feladatok megoldását. A feladatoknak egy részét (a **Gyakorló**, illetve a **Feladatgyüjtemény** megfelelő feladataival együtt a folyamatos ismétlésbe is beépíthetjük.

Trapézok, paralelogrammák, téglalapok, rombuszok

Szerencsés megoldás, ha a helyi tanterv 5. osztályban írja elő ennek az anyagrésznek a feldolgozását. Ebben az esetben most a korábban tanultakat kell felelevenítenünk, megerősítenünk. Ellenkező esetben szánjunk több órát a témakör feldolgozására, mint amennyit a tanmenet javasol.

El kell érnünk, hogy ezek a fogalmak a tanulók előtt ne elkülönülten, hanem rendszerben jelenjenek meg.

Testek építése

Ha a testek építésében az elmúlt két évben nem szereztek kellő gyakorlatot, akkor közös munkában kell elkészítenünk néhány testet, és csak azután adhatunk önálló munkára ilyen feladatokat. Ha sok hiányosságot veszünk észre, akkor növeljük az erre a részre szánt órák számát a szerkesztésekre szánt órák rovására. A sík- és térgeometriai modellezőkészlet lapjaiból öntapadó árazócédulával gyorsan, sokféle testet állíthatnak elő az órán is.

Gyakorlófeladatok. Törd a fejed!

A bő és választékos feladatanyag nemcsak az *összefoglaláshoz* és a *folyamatos ismétléshez* nyújt segítséget, hanem a tananyag-feldolgozás során megoldandó differenciáláshoz is válogathatunk ezekből. A *Törd a fejed!* című fejezet feladatai közül kitűzhetünk *szorgalmi feladatokat,* vagy *pontversenyt* írhatunk ki.

3. Függvények, egyenes és fordított arányosság, százalékszámítás

A hatodik osztályban *nem definiáljuk* a függvénnyel kapcsolatos fogalomrendszert, a szemléletre támaszkodva vizsgáljuk a mennyiségek közötti kapcsolatokat. Ugyanakkor az osztály képességeinek megfelelő szinten már fel kell vetnünk a következő kérdéseket:

Mik az elemei az alaphalmaznak; mely számokra értelmezhetjük és melyekre nem a feladatot (az értelmezési tartomány fogalmának előkészítése)?

Mely halmaz elemeit rendeljük hozzá az alaphalmaz elemeihez (képhalmaz és az értékkészlet fogalma)?

Mi a hozzárendelés szabálya?

Hogyan ábrázolható a derékszögű koordináta-rendszerben a két halmaz közti kapcsolat?

Hetedik osztályban tanítjuk a lineáris függvényt. Ott azt is tisztázzuk, hogy az egyenes arányosság speciális lineáris függvény. A mostani vizsgálatokkal előkészíthetjük ennek az ismeretrendszernek a kiépülését. Az egyenes és a fordított arányossági következtetésekkel ötödik osztályban is foglalkoztak a gyerekek. Hatodik osztályban, az előző anyagrészekkel kapcsolatosan is találkozhattak ilyen feladatokkal. *A most tárgyalt tananyagot teljes egészében feldolgozzuk a hetedik osztályos tankönyvben is*, de ott már tudatosítva a függvény és a lineáris függvény fogalmát. Ebből következik, hogy a különböző helyi tantervek igen eltérő módon és szinten dolgoztathatják fel ennek a fejezetnek az anyagát, így nagy különbségek lehetnek az egyes osztályok között. Az *általános iskolában*, a leggyengébb osztályokban most pótoljuk azt, amit az ötödikben nem sikerült begyakoroltatnunk (grafikonok elemzése, egyszerű következtetések), míg a jobb, például a *gimnáziumi osztályokban* nagyobb súlyt kaphat a különböző megoldási módok (lásd a tankönyv kidolgozott példáit) elemzése, a függvény és a lineáris függvény fogalmának előkészítése, összetett következtetési feladatok megoldása.

A tananyag feldolgozására 18–24 órát javaslunk. A tanmenethez képest több időt szánjunk a grafikonok elemzésére, ha eddig kevés ilyen feladattal találkoztak a gyerekek.

Ha kevés az időnk, akkor a feladatokat csak következtetésekkel oldjuk meg, így nyerhetünk egy-két órát. Ebben az esetben számítanunk kell arra, hogy hetedik osztályban több időt kell szánnunk ennek a témakörnek a további tárgyalására.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal. Grafikonok elemzése. A függvény fogalomrendszerének előkészítése. Statisztikai elemzések (például újságokban található aktuális grafikonok vizsgálata).
2. *Két szám aránya.* Nagyítás, kicsinyítés. A tanultak alkalmazása a természetismeret, illetve a technika tantárgyakban tanultakra.
3. Arányos osztás. Kördiagramok.

4. *Az egyenes arányosság* fogalma és tulajdonságai. Egyenes arányossági következtetések. Az egyenes arányosság ábrázolása a derékszögű koordináta-rendszerben
   Az $x \mapsto a \cdot x$ $(a \neq 0)$ függvény vizsgálata konkrét, szemléletes példákkal.
   A lineáris függvény fogalomrendszerének előkészítése. A tanultak alkalmazása a matematika különböző témaköreiben, gyakorlati jellegű feladatokban.
5. *A fordított arányosság* fogalma. Fordított arányossági következtetések.
   A fordított arányosság ábrázolása a derékszögű koordináta-rendszerben.
   Az $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0;\ \ x \neq 0)$ függvény vizsgálata konkrét, szemléletes példákkal.
6. *Százalékszámítás.* A százalékérték, az alap és a százalékláb kiszámítása.
5. *Valószínűségi kísérletek.*

Kapcsolódási lehetőségek

Számtan, algebra

A feladatok többsége alkalmas a szövegelemző, szövegértelmező képesség fejlesztésére, az alapműveletek fogalmának megerősítésére, továbbá az írásbeli szorzás és osztás gyakorlására, a számolási képességek folyamatos fejlesztésére, a racionális számok szorzásának, osztásának a gyakorlására.

Az *Arányos osztás* című fejezet a törtrész kiszámításához kapcsolódik.

A megfeleltetés szabályának megadása többféle alakban előkészíti az egyenletek ekvivalens átalakításának tanítását.

Mérés, geometria

Sok feladat kapcsolódik a hosszúság-, űrtartalom-, tömeg-, idő- vagy szögméréshez, a mértékegységek átváltásához. A kerület-, terület- és térfogatszámításról tanultak ismétlése. Hasonlóság.

Valószínűség, statisztika

A grafikonokról, arányos osztásról, százalékszámításról tanultakat eszközként alkalmazzuk a statisztikai vizsgálatokban, valószínűségi kísérletekben. (Eloszlások meghatározása, diagramok értelmezése, a relatív gyakoriság megadása.)

Tantárgyak közti koncentráció

Földrajz, térképolvasás; technika: arányos nagyítás, kicsinyítés.

Fizika: a feladatok mintegy fele kapcsolódik a következő témakörökhöz:

A belső energia változásainak vizsgálata, hőmérséklet-változás, olvadás, fagyás stb.

A sűrűség fogalma. A tömeg, térfogat, sűrűség közti kapcsolat.

A sebesség fogalmának előkészítése.

Tanmenetjavaslat

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
1–2. **1–2.**	*Grafikonok elemzése, készítése.* Aktuális statisztikai adatokat szemléltető diagramok vizsgálata. Hőmérséklet mérése, belső energia. Idő–út grafikon.	Tk. 3.01–3.08.; B3.02–B3.03.; Gy. 9.26–28.; Fgy. 5.1.08–18.
3. **3–4.**	*Két szám aránya.* Az arány jelentése, kifejezése tört- és tizedestört alakban. Mennyiségek aránya. A tört mint hányados, a tört mint arány. Kicsinyített, illetve nagyított képek (alaprajzok, térképek, nézeti rajzok) értelmezése. Osztás. Törtek tizedestört alakja.	Tk. 3.09–3.18.; Gy. 4.93–4.95., 9.36–9.43.; Fgy. 4.4.05., 5.2.03.
4–5. **5–6.**	*Arányos osztás.* Kördiagram értelmezése. Tört, törtrész, törtrészek közti kapcsolatok.	Tk. 3.19–3.21.; Gy. 4.96–4.97. Fgy. 4.4.01–02., 4.4.06., 4.4.08.
6–7. **7–9.**	*Az egyenes arányosság* fogalma, tulajdonságai. Az egyenes arányosság grafikonja. Egyenesen arányos mennyiségek ismeretlen értékeinek meghatározása (elsősorban) következtetéssel. *Jobb csoportban:* Az $x \mapsto a \cdot x$, $y = a \cdot x$, illetve $\frac{y}{x} = a$; $(a \neq 0)$ formula értelmezése, használata konkrét, szemléletes példákkal. Műveletek racionális számokkal, törtrész kiszámítása. Út, idő, sebesség. Hőmérséklet mérése, belső energia. Tömeg, térfogat, sűrűség.	Tk. 3.23–3.31.; B 47 o. 1. példa, B3.01.; Gy. 5.01–5.40.; Fgy. 5.2.01., 4.4.10., 4.4.12.
8–9. **10–12.**	*A fordított arányosság fogalma, grafikonja és tulajdonságai.* Fordítottan arányos mennyiségek ismeretlen értékeinek meghatározása (elsősorban) következtetéssel. *Jobb csoportban:* Az $x \mapsto \frac{a}{x}$, $y = \frac{a}{x}$, illetve $x \cdot y = a$; $(a \neq 0;\ x \neq 0)$ formula értelmezése, használata konkrét, szemléletes példákkal. Műveletek racionális számokkal. Út, idő, sebesség. Területszámítás. Hőmérséklet mérése.	Tk. 3.32–3.39.; B3.04., B3.07–B3.08.; Gy. 5.81–5.94.; Fgy. 5.2.09–10.
10–11. **13–14.**	*A százalékérték kiszámítása.* (Következtetés–szorzás) Alap, százalékláb, százalékérték fogalma, jelölések. Szorzás törttel, tizedestörttel. Törtrész kiszámítása. Adó, bruttó jövedelem; nettó jövedelem. Arányos következtetések, kördiagramok.	Tk. 3.40–3.46.; Gy. 5.41–5.53., 9.24–9.25., 9.30.; Fgy. 4.3.03.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
12–13. **15–16.**	*Az alap kiszámítása következtetéssel és törttel való osztással.* Százalékszámítás gyakorlása. Osztás tizedestörttel. Szöveges feladatok, arányossági következtetések.	Tk. 3.47–3.49.; Gy. 5.64–5.73.
14–15. **17–18.**	*A százalékláb kiszámítása.* Arány, tört, törtrész, századrész, százalék. Osztás. Arányossági következtetések. Kerekítés, pontosság. Törtek tizedestört alakja. Aktuális statisztikai vizsgálatok. Kördiagramok.	Tk. 3.50–3.51.; Gy. 5.74–5.80., 9.29.
16. **19–20.**	*Valószinűségi kisérletek.* A biztos, lehetséges, de nem biztos, lehetetlen események megkülönböztetése. A relatív gyakoriság meghatározása. Törtrész. Törtek tizedestört alakja. Százalékszámítás.	Tk. 3.52–3.56.; Gy. 9.60–9.70.
17–20. **21–24.**	A tanultak összefoglalása, gyakorlása. Vegyes, illetve összetett arányossági és százalékszámítási feladatok megoldása. Ismerkedés a kamat fogalmával és a kamatos kamatszámítással. **4. dolgozat.** A folyamatos ismétlés és a felzárkóztatás megszervezése. A mértékegység és a mérőszám közti összefüggés azonos mennyiség mérésekor. Kerület-, terület-, felszín-, térfogatszámítás. Fizikában tanult fogalmak, illetve a lineáris függvény, egyenletek grafikus megoldásának előkészítése.	Tk. 3.57–3.65.; B3.05–B3.16.; Gy. 5.06., 5.54–5.63., 5.95–5.97., 9.22–9.25.; 10.04.; Fgy. 4.3.01–15.; 4.4.03–04., 4.4.07., 4.4.09., 5.2.10–11., 6.1.08. Felmérő feladatsorok

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Mit olvashatunk le a grafikonról?

A fejezet célja a tanultak felelevenítése és a hiányok pótlása. Ha a tanulók ötödik osztályban begyakorolták a grafikonok elemzését, mennyiségek közti kapcsolatok (relációk) ábrázolását grafikonnal, akkor egy tanórában, a tankönyv **3.01–3.04.** feladatának feldolgozásával kellően előkészíthetjük a témakör tárgyalását. Ha úgy látjuk, hogy tanulóink nem érték el a követelményekben előírt szintet, akkor dolgoztassuk fel a **Gyakorló** és **Feladatgyűjtemény** megfelelő feladatait is. Ebben az esetben 2–3 órát kell szánnunk ezekre a feladatokra.

Két szám aránya

Itt csak megalapozzuk a fogalmat, olyan mélységig tárgyaljuk, amely az egyenes és fordított arányosság kiszámításához szükséges. 7. osztályban visszatérünk az arány, arányos osztás tanítására. Itt inkább az összefüggések megmutatása a cél.

Tört – hányados – arány – törtrész. Ezek tartalma más és más, de megjelenési formája ugyanaz: $\frac{a}{b}$ alakú tört.

Célszerű a jelentések közti különbözőséget feltárni. A tört: racionális szám; a hányados: művelet, amely törtvonallal is felírható; az arány: két szám viszonyát mutatja meg; a törtrész mérőszáma: valamely mennyiség valamekkora részét fejezi ki.

Arányos osztás

Az arányosságról tanultak közvetlen alkalmazásaként foglalkozhatunk ezzel az anyagrésszel. A törtrészek kapcsolata az egész résszel címet is viselhetné, hiszen 4 : 5 arányban osztani valamit annyit jelent, hogy a két rész összegének ki kell adnia az egészet:

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1.$$

Jellemző hiba, hogy például a 4 : 5 arányban való felosztás helyett az egész rész $\frac{1}{4}$ részét és $\frac{1}{5}$ részét számítja ki a tanuló.

Az egyenes arányosság

Fontosnak tartjuk azt, hogy a gyerekek minél több – a tartalom és a matematikai modell szerint is minél változatosabb – feladat megoldásával önállóan jussanak el az egyenes arányosság tulajdonságainak felismeréséhez, ha ezeket önállóan nem is tudják precízen megfogalmazni.

Az **1.** és a **2.** példa összehasonlításával rámutathatunk az alaphalmaz meghatározásának szükségességére. Vetessük észre, hogy a következő két szabály csak a jelölésekben tér el, vagyis a két leképezés szabálya megegyezik:

1. $n \mapsto 4 \cdot n$; 2. $T \mapsto 4 \cdot T$.

A két hozzárendelés modellje mégis különbözik, mivel a két alaphalmaz más.

A tankönyv kétféle értelmezést ad az egyenes arányosságra. Az első közelebb áll a gyermekek szemléletéhez, ezt a gyerekek többsége önállóan is megfogalmazhatja.

A helyes fogalomalkotáshoz nélkülözhetetlen, hogy az értelmezés és később a begyakorlás során találkozzanak ellenpéldákkal is a gyerekek.

Egyenesen arányos mennyiségek ismeretlen értékeinek meghatározása

Hatodik osztályban minimumkövetelmény, hogy a tanulók felismerjék, két változó mennyiség között egyenes arányosság van-e vagy sem. Elvárjuk, hogy legyenek képesek az adatok áttekinthető lejegyzésére, táblázatba rendezésére, és (elsősorban következtetéssel) legyenek képesek meghatározni az egyenesen arányos mennyiségek

ismeretlen értékeit. Az egyéb megoldási módokkal (lásd **4.** példa) most csak ismerkedünk, gyengébb összetételű osztályokban, ha kevés az időnk, ezekkel keveset foglalkozzunk. (Hetedikben válhat követelménnyé az ismeretlen mennyiség meghatározása aránnyal való szorzással.)

A **3.** példa feldolgozásával az összetartozó értékek hányadosának a jelentését vizsgálhatjuk. Ezekkel a vizsgálatokkal megalapozhatjuk a fizika egyes fogalmainak (sebesség, sűrűség stb.) és a lineáris függvény tulajdonságainak a megértését.

A **Törd a fejed** című fejezetben további feladatokat találunk (**B3.01., B3.03., B3.05., B3.06.**) amelyek segítségével elmélyíthetjük az egyenes arányosság fogalmát.

A fordított arányosság

A fordított arányossági következtetésekkel kevesebbet foglalkoztunk eddig. Ezért, és a nehezebben felismerhető összefüggések miatt több gondot okoz a gyerekeknek, mint az egyenes arányosság. A tankönyv **1.** példája, **3.32.** feladata, esetleg a Matematika 6. Gyakorló **5.85.** feladata készítheti elő a fogalom kialakítását, a fordított arányosság tulajdonságainak felismerését. A fogalom kialakításához most is szükséges, hogy ellenpéldákkal is találkozzanak a tanulók (**2.** példa).

A tankönyvben található két értelmezés közül (a tapasztalatok szerint) a másodikat könnyebben megérti és jobban tudja alkalmazni a tanulók többsége.

Fordítottan arányos mennyiségek ismeretlen értékeinek meghatározása

Arra kell törekednünk, hogy tanulóink többsége legyen képes felismerni, hogy két változó mennyiség között fordított arányosság van-e vagy sem, és legyen képes tetszőleges módon meghatározni a fordítottan arányos mennyiségek hiányzó értékeit. A „tetszőleges módot” azért hangsúlyozzuk, mert a fordított arányosság esetén sok gyerek számára nem a következtetés a legkézenfekvőbb megoldás. Könnyebben boldogulnak, ha felismerik, hogy az összetartozó értékek szorzata (0-tól különböző) állandó.

A gyerekeknek nehézséget jelenthet az egyenes és a fordított arányosság megkülönböztetése, továbbá az olyan feladat megoldása, amelyben az egyik változó növekedése maga után vonja a másik változó csökkenését, de a két mennyiség között nem fordított arányosság van. Ezekben az esetekben is az összetartozó értékek szorzatának vizsgálata a legcélravezetőbb.

A **B3.08.** feladat megoldásával tudatosíthatjuk a mérőszám és a mértékegység közötti fordított arányosságot.

A százalékérték kiszámítása

A törtrész kiszámítását ötödik osztályban alapoztuk meg. Akkor fel is hívtuk a figyelmet a tört és a törtrész közti különbségre. *Például:* $\frac{1}{3}$ racionális szám, az $\frac{1}{3}$ rész valamely mennyiségnek a része, tehát viszonyított érték. Dimenzionális különbség is lehet a két érték közt. 1 m-nek az $\frac{1}{3}$ része $\frac{1}{3}$ m és nem $\frac{1}{3}$. Erről itt is szólnunk kell. A *százalék* ekvivalens a *századrésszel* (és nem a századdal). Azaz a százalékérték kiszámítása valamely mennyiség századrészének kiszámításával egyezik meg, tehát a törtrész

kiszámításával. Ez lehetőséget ad arra, hogy többféleképpen tárgyaljuk a témakört. Egyrészt következtetéssel (ezzel a módszerrel már alsó tagozatban is meg tudunk oldatni törtrésszel kapcsolatos feladatokat), másrészt tizedestörtek szorzásával. Ez utóbbi módszer – bármennyire is kézenfekvőnek tűnik – nem eredményezheti a százalékszámítás képletcentrikus tanítását. A tankönyv ábrái a gondolatmenetet vetítik elénk, s jó, ha a tanulók ezt a gondolatmenetet sajátítják el, és nem a százalékszámítás „képleteit". Az ábrákon történő eligazodás megkönnyíti későbbi munkánkat is, amikor az alap, illetve a százalékláb kiszámítása a feladatunk.

Nagyon fontos megmutatnunk, hogy valahány százalékkal való növekedés vagy csökkenés „hányszoros"-ként írható fel.

Például: ha 20%-kal növekszik a cipő ára, akkor az eredetihez viszonyítva 120% lesz, azaz 1,20-szorosára változik az ár.

A csökkenésre hasonlóan: ha egy termék ára 30%-kal csökken, az új ár az eredetinek 70%-a lesz, tehát 0,70-szorosára változik a termék ára.

Ez majd a szöveges feladatok megoldásánál is nagy segítséget ad a tanulóknak.

Egy mennyiség százalékos megoszlásának kördiagramos ábrázolása egyrészt elmélyíti a százalék (mint törtrész) fogalmát, másrészt szélesíti a kördiagrammal kapcsolatos ismereteket.

A **Törd a fejed!** című fejezetben találhatunk összetett feladatokat is a százalék kiszámítására (lásd a B 48–B 51. oldal kidolgozott példáit és feladatait). A **4.** példa feldolgozásával megismerkedhetnek a tanulók a *kamatos kamat* kiszámításának elvével.

Didaktikailag valamely mennyiség törtrészének törtrészét kell meghatároznunk. Elvileg nem sokkal bonyolultabb, mint az előző anyagrész, mégis sok nehézséget okoz tanítványainknak. Ezért átlagos vagy átlagosnál gyengébb csoportban csak akkor javasoljuk a feldolgozását, ha elegendő időt tudunk rá szánni.

Csökkennek ezek a problémák, ha konkrét példákkal tisztázzuk, hogy az additív és a multiplikatív növelés között különbség van (valamennyivel növelni nem azonos ugyanannyiszorosra növelni).

A tanulóknak sok gondot okoz, hogy például egy termék árának 40%-kal való csökkentése, majd az így kapott érték 40%-kal való növelése nem egyenlő az eredeti árral (100%-kal): $0{,}60 \cdot 1{,}40 = 0{,}84$, tehát az eredeti árhoz viszonyítva 16%-os a csökkenés. Annak a belátása is hasonló nehézségeket jelent, hogy a két változás felcserélése (például először csökkenteni 40%-kal, majd növelni 50%-kal, vagy fordítva) azonos változást eredményez: $0{,}60 \cdot 1{,}50 = 1{,}50 \cdot 0{,}60 = 0{,}90$.

Az alap kiszámítása

A képlet megtanítása helyett a következtetés gondolatmenetének megértetése és elsajátíttatása a feladatunk. Ebben segít az ábra, amelyet már a százalékérték kiszámításánál megismerhettek a gyerekek. Most ezt felhasználva – utalva a művelet inverzére – mutatjuk meg az alap kiszámításának algoritmusát.

A százalékérték kiszámításánál az egész részből következtettünk a törtrészre, míg itt az alap kiszámításánál törtrészből az egész részre (a 100%-ra). A képletek használatát itt is kerüljük.

A **3.48–3.49.** feladat fokozatosan nehezedő részfeladatai lehetőséget adnak a differenciálásra. A jobb képességű tanulókkal csak akkor célszerű a könnyebb részfeladatok mindegyikét megoldatni, ha ez indokolt, azaz ismereteik hiányosak.

Gondoljuk meg, hogy átlagosnál gyengébb csoportban redukáljuk-e vagy teljesen elhagyjuk ennek a fejezetnek a tárgyalását. A felszabaduló időre szükségünk lehet a műveletek gyakoroltatásához, ugyanakkor a százalékszámítás tanulására most befektetett munka majd hetedik osztályban eredményezhet megalapozottabb tudást.

A százalékláb kiszámítása

Átlagos vagy átlagosnál gyengébb csoportban csak akkor javasoljuk a fejezet feldolgozását, ha elegendő időt tudunk rá biztosítani.

Az aránnyal vezetjük be ezt a fogalmat. Az $\frac{a}{b} = a : b$ arány megmutatja, hogy az a mekkora része b-nek. Ha ezt a törtrészt századrészekben adjuk meg, akkor kapjuk meg a százaléklábat.

A korábbi ábrák (a százalékértéknél és alapnál találhatók) felhasználásával is és következtetéssel is célszerű ezt az anyagrészt tanítani, mert így építhetünk a korábban tanultakra, meg tudjuk mutatni a fogalmak rendszerét, s ezáltal nem külön fogalomként jelentkezik a százalékláb, hanem egy rendszer részeként. A tankönyv szándékosan nem említi a százalékláb kiszámításának képletét, helyette inkább a következtetést szorgalmazza. A **3.50.** feladatban – mintegy szintézisként – a tört, törtrész, százalék közti kapcsolatot emeljük ki. Megoldatását mindenképpen javasoljuk.

A **3.51.** feladat megoldásával megfigyeltethetjük, hogy a megfelelő százalékláb kiszámításával hogyan állapíthatjuk meg a mennyiségek százalékos eloszlását, és hogyan ábrázolhatjuk ezt az eloszlást kördiagrammal.

Valószínűségi kísérletek

A korábbi években megismert fogalomkört felelevenítjük. A számításokban alkalmazzuk a tizedestörtekről és a százalékszámításról tanultakat.

Gyakorlófeladatok.
Törd a fejed!

A tanultak gyakorlása és összefoglalása mellett felhívjuk a figyelmet a százalékszámítás ismétlésének fontosságára.

A **B3.01–B3.03., B3.05–B3.06.** feladattal a lineáris függvény fogalmát készíthetjük elő. Az ilyen típusú feladatok megoldása azért is fontos, mert a tanulók látják, hogy nem csak egyenes és fordított arányosság lehet két változó mennyiség közt.

Fontosságuk ellenére, ha időzavarba kerültünk, javasoljuk a differenciálást, a tanulópárok megszervezését, végső esetben a lineáris függvényt előkészítő feladatok elhagyását. 7. és 8. osztályban hasonló feladatokkal találkoznak még a tanulók.

4. Tengelyes tükrözés

A geometriai transzformációkról

A geometriai transzformációk kifejezéssel még nem találkoztak a tanulók, pedig az alsóbb évfolyamokban sok feladatot oldottak meg eszközzel, rajzzal, színezéssel úgy, hogy végeredményben transzformációt hajtottak végre.

Tengelyesen tükrös alakzatokat állítottak elő nyírással, hajtogatással, síkbeli építéssel, szögestáblán, rajzban. Konkrét sík- és térbeli alakzatokról tevékenységgel megállapították, hogy tükrös vagy nem tükrös. Mintákat, parkettákat készítettek tükrözéssel, eltolással, forgatással. Síkbeli alakzatokat nyújtottak, zsugorítottak, torzítottak, nagyították, kicsinyítettek megfelelően transzformált hálókon. Egy-egy alakzatot kivágva, másolópapírra lerajzolva megfigyelték, hogy hányféleképpen illeszthető rá ugyanarra a rajzra.

A tanulók élményt gyűjtöttek a különböző szimmetriákról, az egybevágósági transzformációkról, a hasonlóságról. A transzformációk segítettek egy-egy alakzat tulajdonságainak megállapításában is. *Például:* a négyzetnek a szemközti és a szomszédos oldalai is egyenlőek, mert az oldalak felezőmerőlegesei, illetve az átlók mentén összehajtva a két rész egymással fedésbe hozható.

A transzformációkkal kapcsolatos követelmények az alsóbb évfolyamokban csak általánosan fogalmazhatók meg. *Például* 4. osztályos követelmény: „Szemlélet alapján tudják eldönteni egyszerű esetben, hogy két alakzat lehet-e egybevágó." Az volt a cél, hogy a tanulókban jó *szemlélet* alakuljon ki a később tanulandó konkrét transzformációk befogadásához. Ezen a célon 5. osztályban sem léptünk túl.

A tankönyvben a „Mi lehet a szabály?" című alfejezet feladatainak feldolgozásával eleveníthetjük fel a korábban tanultakat.

6. osztályban kerül sor a *tengelyes tükrözés,* a későbbiekben az *eltolás, forgatás,* azon belül a *középpontos tükrözés,* és a *hasonlósági transzformációk* részletes tárgyalására.

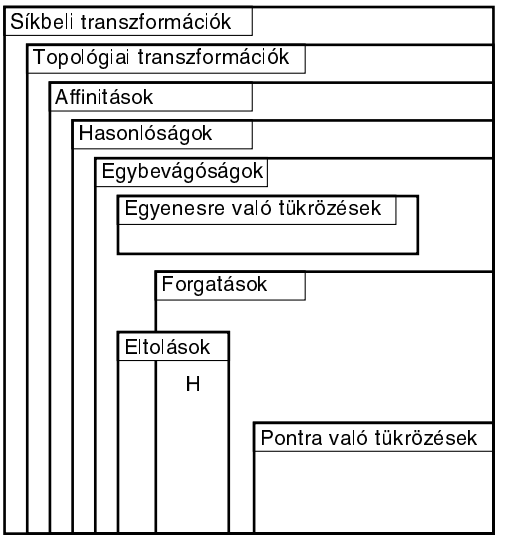
Ha a síkon, a térben egy-egy alakzattal valamilyen átalakítást (tükrözést, eltolást, forgatást, torzítást, nagyítást stb.) végzünk, és egyértelműen meg tudjuk állapítani, hogy az eredeti alakzat egy-egy pontjának az új alakzat melyik pontja a megfelelője, akkor azt mondjuk, hogy az alakzatot transzformáltuk.

7. osztályban majd tudatosítjuk a függvényfogalmat, akkor tárgyalhatjuk a geometriai transzformációt mint függvényt. 6. osztályban csupán előkészítjük, nem tudatosítjuk ezt az általánosabb összefüggést. Ugyanakkor saját magunk számára érdemes átgondolnunk a fogalomrendszert.

A transzformáció során a sík, illetve a tér pontjaihoz a sík, illetve a tér pontjait rendeljük hozzá egyértelműen. Az egyértelműséget valamilyen *szabály* megadásával biztosítjuk. *A geometriai transzformáció olyan függvény, amelyben mind az értelmezési tartomány, mind az értékkészlet ponthalmaz.*

Ebben a tárgyalásmódban a síkot leképezhetjük egy vonaldarabra (a teret egy felületdarabra) úgy, hogy a sík több, akár végtelen sok pontjának ugyanaz lesz a képe.

Az általános és a középiskolában tárgyalt transzformációk csoportosítását az ábra szemlélteti.
H: helyben hagyás (identitás)



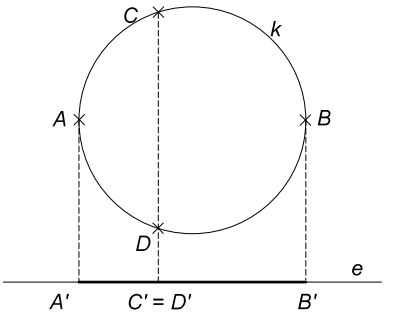
Egyes szakkönyvek a geometriai transzformációt egy-egyértelmű leképezésként definiálják, vagyis olyan függvényként, amely invertálható. Mi az előző, általánosabb értelmezést javasoljuk a következők miatt:

7. osztályban az egy-egyértelmű leképezést nem tárgyaljuk olyan mélységben, hogy ilyen fontos fogalmat építsünk rá. Legfeljebb csak a 9. vagy a 10. osztályban foglalkozhatunk a függvény inverzével.

Kár lenne kihagyni az „elfajuló esetek” vizsgálatát. Éppen az általánosabb megközelítés teszi lehetővé, hogy később fogalmilag elkülönítsük az egy-egyértelmű leképezést.

A középiskolai tankönyvek többsége is az általánosabb értelmezést fogadta el.

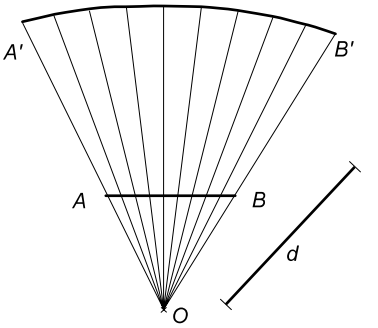
A topologikus leképezés során az alakzatokon csak *folyamatos átalakítást* hajthatunk végre. Megengedett a nyújtás, az összenyomás, de nem megengedett a szakítás, ragasztás, vagyis azok az átalakítások, amelyek megváltoztatják a folytonossági viszonyokat. Így a határpont továbbra is határpont, a belső pont továbbra is belső pont, a külső pont külső pont marad.



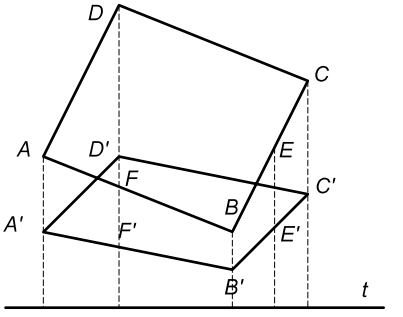
Nem topologikus leképezés például a *k* kör *e* egyenesre történő merőleges vetítése. A körvonal az átalakítás során elfajult, szakasszá préselődött össze.

Topologikus leképezést eredményez (de nem affinitás) például a következő szabály:

A sík pontjai egy adott *O* ponttól adott *d* szakasszal távolodjanak el az *O* pontból kiinduló félegyenesen.

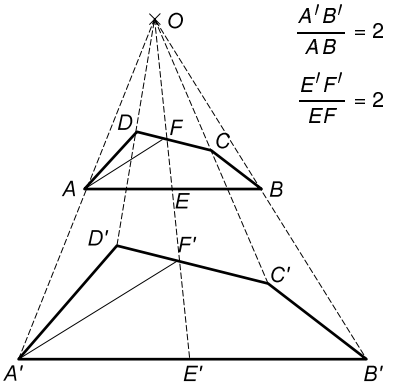


Az affinitások egyenestartó topologiai transzformációk. (Párhuzamostartók is, de általában nem szögtartók.) Például *merőleges affinitás* a t tengelyre: a sík pontjainak a t-től való távolsága adott arány szerint változik, itt $\lambda = \frac{1}{2}$.



$AB \parallel CD$
$A'B' \parallel C'D'$

A hasonlóság aránytartó affinitás. (Bármelyik két megfelelő szakasz aránya állandó, ezért szögtartó is). *Például:* nagyítás az O pontból, ha az arányszám: $\lambda = 2$.



$FAE\sphericalangle = F'A'E'\sphericalangle$

Az *egybevágóság* – távolságtartó hasonlóság. Helyben hagyás (identitás): eltolás **0** vektorral, forgatás 360° egész számszorosával.

Általános iskolában a geometriai transzformációkat nem tudjuk az ismertetett osztályozás rendjében tanítani. A tanulók életkori sajátosságai, geometriai szemléletük, absztraháló képességük szintje és a ráfordítható óraszám ezt nem teszi lehetővé.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Felelevenítjük a geometriai trancformációkról, azon belül a *hasonlóságról* és az *egybevágóságról* szerzett ismereteket.
2. Összegyűjtjük, kiegészítjük, rendszerezzük azokat a tapasztalatokat, amelyeket a gyerekek a tengelyes tükrözéssel kapcsolatban az előző években szereztek. A tapasztalatokat többféleképpen is megfogalmazzuk, míg eljutunk ahhoz a gondolathoz, hogy a tengelyes tükrözés a síknak egy tengely körüli 180°-os elforgatása.
3. Kiemeljük, hogy a tengelyes tükrözés olyan *leképezés*, amely *ponthoz pontot rendel hozzá*. Összegyűjtjük a hozzárendelés szabályából adódó tulajdonságokat. Ezek felhasználásával megszerkesztjük az alakzatok tengelyesen szimmetrikus képét.

4. Tudatosítjuk a *tengelyes szimmetria* fogalmát.

   Előállítunk *szimmetrikus háromszögeket, négyszögeket, szabályos sokszögeket.* Megfogalmazzuk ezeknek a szimmetriával igazolható *tulajdonságait.* Ezek figyelembevételével *szerkesztünk* („jól megválasztott" adatokból) szimmetrikus háromszöget, négyszöget. A szimmetriából kiindulva átismételjük, kiegészítjük a korábban elsajátított szerkesztési eljárásokat.

5. A szimmetrikus háromszögek és a szimmetrikus négyszögek közül a deltoid, azon belül a rombusz területének kiszámításával foglalkozunk.

A tananyag feldolgozása során legyünk igényesek a *szerkesztési feladatok pontosságára, szépségére.* Tanulják meg a gyerekek *a szerkesztési feladatok megoldásának lépéseit.* Később már nehezebben fogadtatható el velük ez a gondosság. Tudatosan fejlesszük a *matematikai kifejezőkészségüket* azzal, hogy elvárjuk tőlük a tapasztalatok, sejtések, tulajdonságok – a társak számára is érthető – megfogalmazását.

A gyerekek képességeinek, a helyi tanterv előírásainak és a rendelkezésre álló időnek a függvényében igen különböző színvonalon dolgoztatható fel a fejezet. **A differenciálás** és szelektálás lehetőségei például:

Nem foglalkozunk a húrtrapézzal és (vagy) a deltoid területével.

Csak a jobbaktól követeljük meg a tengelyesen szimmetrikus háromszögek és négyszögek megszerkesztését és a háromszögek belső szögeivel kapcsolatos számításokat.

Megválogatjuk, hogy mely részeket dolgozzuk fel csak a szemléletre támaszkodva és melyeket deduktív szinten (a definíciók megfogalmaztatásával és az összefüggések bizonyíttatásával).

A tanmenet **B** változatának óraszáma a lehetséges legteljesebb tárgyaláshoz igazodik. Természetesen ha redukáljuk a tananyagot, akkor kevesebb óra is elég lehet az anyagrész tárgyalásához, mint amennyit a tanmenet javasol.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika, kombinatorika

A tengelyes tükrözés során ponthoz pontot rendelünk hozzá. Ez a gyerekekben erősíti azt a gondolatot, hogy minden alakzat ponthalmaz. Mi igaz egy halmazra? Állítások igazságának eldöntése (**4.26., 4.31., 4.45.; B4.22.**). Állításokhoz igazsághalmaz keresése, ha adott az alaphalmaz (**B4.23–B4.25.**). Sokszögek elhelyezése halmazábrába; halmazok uniója; metszete; kiegészítő halmaz a részhalmazok tulajdonságainak megfogalmazása (**4.39., 4.45.**).

Kombinatorikus gondolkodásmódot igényel például:

Adott szakaszokból (szívószáldarabokból) háromszögek előállítása (**4.27.**).

Szerkesztési feladatokban minél több megoldás megkeresése.

Szimmetrikus számjegyekből szimmetrikus számok előállítása (**4.36.**).

Számtan, algebra

Szögek és egyéb adatok kiszámítása következtetéssel, egyenlettel (**B4.07., B4.20., B4.32–B4.33.**). Területszámítás; műveletek racionális számokkal.

Relációk, függvények

Alakzatok transzformálása derékszögű koordináta-rendszerben (**4.02., 4.46., 4.48.**).

A függvényfogalom kialakítása után, 7. osztályban tudatosíthatjuk, hogy a geometriai transzformáció is egyértelmű hozzárendelés, függvény. Itt szemléletes feladatokkal előkészíthetjük ennek a fogalomrendszernek a kiépítését.

A terület mint függvény. Hogyan változik a behelyettesítési érték, ha változnak az adatok (**B4.37.**).

A geometria egyéb témakörei

A tengelyes szimmetria vizsgálatakor kibővítjük és elmélyítjük a háromszögekről, a speciális négyszögekről, a szabályos sokszögekről tanultakat. (Deltoid, rombusz, húrtrapéz, téglalap, négyzet tulajdonságainak vizsgálata.)

Tanmenetjavaslat

A tankönyv bővített változatában lévő tananyag csak emelt szinten dolgozható fel teljes egészében. Heti 4 matematikaóra esetén is csak akkor, ha más anyagrészek tárgyalásánál megtakarítunk 4-5 órát.

Óra	**Aktuális tananyag** Folyamatos ismétlés, koncentráció	**Feladatok**
1. **1.**	*Mi lehet a szabály?* A geometriai transzformációkról, a hasonlóságról és az egybevágóságról korábban szerzett tapasztalatok felidézése. Függvények, derékszögű koordináta-rendszer.	Tk. 4.01–4.02.; Gy. 8.27–8.29.
2. **2.**	*Mit látunk a tükörben?* A síkra vonatkozó tükrözés. A test és képének összehasonlítása: nagyságuk, távolságuk a tükörsíktól, a jobb és a bal oldal felcserélődése (kísérletek üveglappal vagy kétoldalú tükörrel). Egybevágó testek. Adott testek közül a síkra szimmetrikusak kiválasztása, síkra szimmetrikus testek építése. Testek építése a színesrúdkészlet elemeiből. Testek elöl-, felül-, oldalnézete. Kapcsolat a kombinatorikával: hány test építhető 3, 4 kockából.	Tk. 4.03–4.05.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
3–4. **3–4.**	*A tengelyes tükrözés.* A síkbeli tengelyes tükrözés a térbeli síkra tükrözés megfelelője a tükörsíkra merőleges síkon. A tükörkép előállítása papírhajtogatással, áttetsző papírral. A tengelyes tükrözés mint a sík *t* tengely körüli 180°-os elforgatása. *A tengelyes tükrözés tulajdonságai, megadása.* Adott tulajdonságú pontok keresése. Szakasz felezőmerőlegese, szögfelező.	Tk. 4.06–4.08.; Gy. 8.30–8.37., 8.44.; Fgy. 6.4.01–13.
5. **5–6.**	*A tükörkép megszerkesztése.* Adott pont tükörképének megszerkesztése kétféleképpen. Egyenes, szakasz, szög; sokszög, kör tükörképének megszerkesztése. Mikor esik egybe egy-egy alakzat a tükörképével? Geometriai alapfogalmak, alapszerkesztések. Háromszög és téglalap szerkesztése. A kör. Tükrözés derékszögű koordináta-rendszerben.	Tk. 4.09–4.16.; Gy. 8.38–8.43., 9.47.
6. **7–8.**	*Tengelyesen tükrös alakzatok,* síkra szimmetrikus testek. Szimmetrikus alakzatok keresése a természetben, művészetben. A tükrösség vizsgálata. A tengelyes szimmetria megkülönböztetése egyéb szimmetriáktól. Egyszerű alakzatok tengelyes szimmetriája. Alakzatpárok közös szimmetriatengelye. Konvex, nem konvex alakzatok. Síkidomok, sokszögek tulajdonságai. A kocka, a téglatest tulajdonságai. Testek építése kockákból. Alaprajzuk.	Tk. 4.17–4.25.; Gy. 8.45–8.49.; Fgy. 6.4.14–16.
7–8. **9–10.**	*Tengelyesen tükrös háromszögek.* A háromszögek közül a tengelyesen szimmetrikus háromszögek kiválasztása, tulajdonságaik. *Szerkesztések az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai alapján.* Állítások igazságának eldöntése. Kombinatorika. A háromszög belső és külső szögei.	Tk. 4.26–4.30.; Gy. 8.50–8.51., 9.49.; Fgy. 6.3.07., 6.4.28–34.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
– **11–12.**	*Tengelyesen szimmetrikus háromszögek szerkesztése.* A szerkesztési feladatok megoldásának áttekintése. *A tükrös háromszög területe.* A tükrös háromszög téglalapba foglalása, átdarabolása téglalappá többféleképpen. Alapszerkesztések. Szerkesztések derékszögű háromszögvonalzókkal. Merőleges szerkesztése az egyenes adott pontjába, az egyenesre külső pontból. Szögfelezés, nevezetes szögek megszerkesztése, szögmásolás. Távolság. Ponttól, egyenestől, szakasztól adott távolságra lévő pontok keresése. A területmérés fogalma, egységei. Téglalap, négyzet, derékszögű háromszög területe. Rácssokszögek területe. Derékszögű koordináta-rendszer.	Tk. B4.01–B4.16.; Gy. 7.50–7.63., 8.52–8.56.
– **13.**	*Szabályos sokszögek* értelmezése, tulajdonságaik vizsgálata. A körlap felosztása egybevágó körcikkekre. A középponti szögek kiszámítása, a hozzá tartozó húrok összehasonlítása. A szabályos sokszög egy-egy szögének meghatározása. A szabályos sokszögek szimmetriatengelyei. Ismerkedés a szabályos testekkel. Oszthatóság: 360 osztói. Forgásszimmetria. Szögmérés, sokszögek belső szögei. Középponti szögek. A sík parkettázása szabályos sokszögekkel.	Tk. B4.17–B4.21.; Gy. 8.70–8.72.; Fgy. 6.3.08–09.
9–11. **14–16.**	*Tengelyesen tükrös négyszögek.* A négyszögek közül a tengelyesen tükrösek kiválasztása. A szimmetriatengely helyzetének vizsgálata (a csúcsokon megy át, vagy az oldalakat felezi). *A deltoid értelmezése, tulajdonságai.* Konvex, nem konvex deltoid. Deltoid szerkesztése. *A rombusz* mint speciális deltoid. Rombusz szerkesztése. „Minden”, „van olyan”, „ha …, akkor”, „pontosan akkor …, ha …” kifejezésekkel állítások megfogalmazása. Háromszögek megszerkesztése. Szögfelezés, nevezetes szögek megszerkesztése, szögmásolás.	Tk. 4.31–4.35.; Gy. 8.57–8.66.; Fgy. 6.4.35–48.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
– **17–18.**	*Jobb csoportban:* *A húrtrapéz értelmezése, tulajdonságai.* A téglalap mint speciális húrtrapéz. A négyzet mint speciális húrtrapéz, mint speciális téglalap és speciális rombusz. *Tengelyesen tükrös négyszögek szerkesztése.* *Négyszögek belső szögei.* A háromszög belső és külső szögei. A tananyag teljes feldolgozásához emelt szinten is további 2-3 órára van szükség.	Tk. B4.22–B4.25.; Gy. 8.67–8.69.; Tk. B4.26–B4.33.; Gy. 8.61–8.62.
– **19–20.**	*Átlagosnál jobb csoportban:* *A deltoid és a rombusz mint speciális deltoid területe.* A négyzet területének kiszámítása, ha az átlója adott. A területmérés fogalma, egységei. Téglalap, négyzet, derékszögű háromszög területe. Háromszögek, négyszögek. Tükrözés. Függvények, összefüggések vizsgálata.	Tk. B4.34–B4.37.
12–14. **21–24.**	*Összefoglalás, gyakorlás.* **5. felmérés.** Értékelés. A hiányok pótlása, az év végi folyamatos ismétlés előkészítése. A tananyag teljes begyakorlásához emelt szinten is további 2-3 órára van szükség.	Tk. 4.36–4.49.; B4.38–B4.44.; Gy. 9.48., 10.05.; Fgy. 6.4.50. 6.3.37–45. Felmérő feladatsorok

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Mi lehet a szabály?

Alsó tagozatban a tanulók szemléletes szinten foglalkoztak geometriai transzformációkkal. Eljutottak a hasonlóság és egybevágóság felismeréséhez. 5. osztályban koordinátarendszerben adott alakzatok különböző transzformációit végezték el. Ennek a fejezetnek a feldolgozásával felelevenítheti jük a korábban elsajátított ismereteket.

Mit látunk a tükörben?

A cím azokra a tevékenységekre, tapasztalatokra utal, amelyeket a tanulók a mindennapi életben és az eddigi geometriatanulással szereztek (tükör vagy átlátszó és tükröző műanyag lap segítségével). A példák, feladatok megoldásával *a síkra való tükrözés* tulajdonságait figyeltetjük meg.

Megállapíthatjuk, hogy

az eredeti test és a tükörképe egybevágó;

az eredeti test és a tükörképe egyenlő távolságra van a tükör síkjától;

a megfelelő pontokat összekötő szakasz merőleges a tükörsíkra;

a test és a tükörképe között az a különbség, hogy a síktükörben a jobb és a bal oldal felcserélődik, ezért a test és a tükörképe mozgással általában nem hozható fedésbe.

Ezeket a tulajdonságokat azért is érdemes megfigyeltetni, mert *a tér pontjainak síkra vonatkozó tükrözése megfelel a síkbeli egyenesre való tükrözésnek.*

A tükrözés tanításában fordítva is lehet építkezni:

egyenesen – pontra,

síkon – tengelyre,

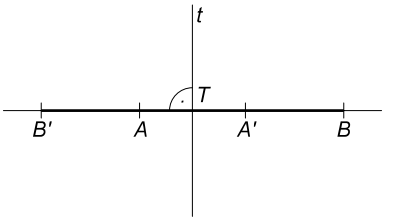
térben – síkra tükrözünk.

Ebben a felépítésben a síkra tükrözést a tengelyes tükrözés után, annak általánosításaként tárgyalhatjuk. A tankönyvi felépítés talán jobban igazodik a tanulók életkori sajátosságaihoz és korábbi élményeihez.

A tengelyes tükrözés; A tengelyes tükrözés tulajdonságai
A tükörkép megszerkesztése

A tankönyv bevezető példája alkalmas arra, hogy kapcsolatot teremtsünk a tér pontjainak síkra tükrözése és a sík pontjainak síkbeli tengelyre tükrözése között. *A test és tükörképének alaprajza,* a piros és a kék alakzat, *a térnek egy olyan síkmetszetén van, amelyre merőleges a tükörsík.* A két sík metszete, közös része egy egyenes. Ez az egyenes a *tükörtengely.*

Ha a tükrözés értelmezési tartományát tovább szűkítjük, a síknak csak egy olyan egyenesén értelmezzük, amely merőleges a tengelyre, akkor a tükör (a helyben maradó alakzat) az egyenes és a tengely (t) metszete, egyetlen pont (T) lesz. Ez a tükrözés az adott egyenesen középpontos tükrözésnek felel meg.



A tankönyv példáiban, feladataiban sokszor szó van eszközhasználatról. Már alsóbb osztályokban is sokféle eszközzel tevékenykedtek a tanulók. Mégis fontos, hogy *a tengelyes tükrözés tulajdonságainak megértéséhez szükséges szemlélet kialakítását sokféle eszközzel biztosítsuk.*

A **4.06.** feladatban sárgaborsószemekről, szívószálról, logikai lapokról, áttetsző papírról van szó. Talán soknak, időben megoldhatatlannak tűnik az ilyen feladat. De lehet, hogy elhagyása a tanulók egy részében még később is sok bizonytalanságot okozna. Ezek a tevékenységek még a szerkesztési és bizonyítási feladatokban is sokszor segíthetnek. A sárgaborsószemekkel *a pont,* a szívószállal *a szakasz, az egyenes,* a logikai lapokkal *a síkidom* tükörképét figyeljük meg. A sárgaborsószemek, a szívószál helyének, helyzetének változtatásával megfigyelhető a kép helyének, helyzetének változása.

Az áttetsző papír *a teljes sík,* azon bármilyen alakzat tükrözését szemlélteti, ha a tengely mentén félbehajtjuk, vagy felemeljük és átfordítjuk.

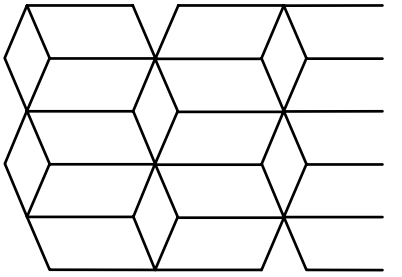
A tengelyes tükrözés tulajdonságainak összegzése csak kellő tapasztalatszerzés után eredményes. A megállapításokat nem szó szerint, hanem értelem szerint várjuk el. Törekedjünk arra, hogy bármilyen alakzatról és tükörképről a tanulók le tudják olvasni a tanult összefüggéseket. Ennek begyakorlására elegendő időt kell biztosítanunk. Hiszen ezek az összefüggések nélkülözhetetlenek az alakzatok tulajdonságainak megállapításában, a szerkesztési és bizonyítási feladatok megoldásában.

A tengelyesen tükrös alakzatok

Gyakori tapasztalat, hogy a gyerekek azonosítják a szimmetriát a tengelyes tükrösséggel. Így vagy minden szimmetrikus alakzatot tengelyesen tükrösnek látnak, vagy a nem tengelyesen szimmetrikuson nem vesznek észre egyéb szimmetriát. Ezért is helyes, hogy ha a tengelyes tükrözés és tükrösség részletes tárgyalása előtt, és azzal párhuzamosan is egyéb egybevágósági transzformációkkal is találkoznak.

A **4.17.** feladathoz tartozó alakzatok mindegyike szimmetrikus, közülük a 2. és a 4. tengelyesen is tükrös.

Egy alakzatot akkor nevezünk szimmetrikusnak, ha van olyan egybevágósági transzformáció – a helyben hagyáson kívül –, amely az alakzatot önmagára képezi le. Beszélhetünk eltolás-, forgás- (ennek speciális eseteként középpontos) és tengelyes szimmetriáról. Egy alakzat többféleképpen is lehet szimmetrikus, ha több különböző egybevágósági transzformáció is van (a helyben hagyáson kívül), amely önmagába viszi. Ezeket a szimmetriákat csak később tudatosítjuk, de a korábbi években is és most is szerezzenek ezekkel kapcsolatos élményt a gyerekek.

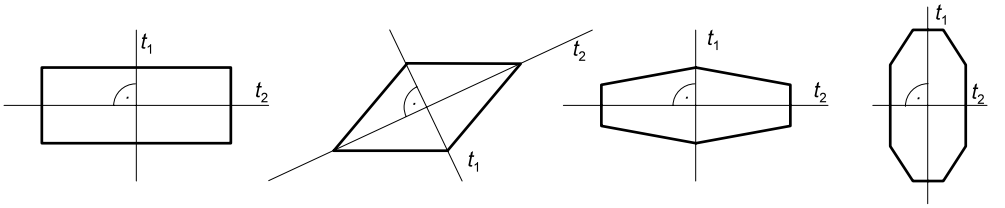


A parkettázott sík lehet többféleképpen eltolásszimmetrikus, forgásszimmetrikus, középpontosan és tengelyesen tükrös.

A tengelyes szimmetria mellett forgásszimmetrikus alakzatokra látnak példát a szabályos sokszögek vizsgálata során. (Ezt a 1. fejezetben kapcsolatba hoztuk a maradékosztályok vizsgálatával.)

A középponti szögek vizsgálata során felvetődhet a körszimmetria.

Tekintsük át a tengelyesen szimmetrikus alakzatok néhány tulajdonságát. Ezeket a tulajdonságokat most nem tanítjuk, de a vizsgálatok során egyiket-másikat felismerhetik a gyerekek.

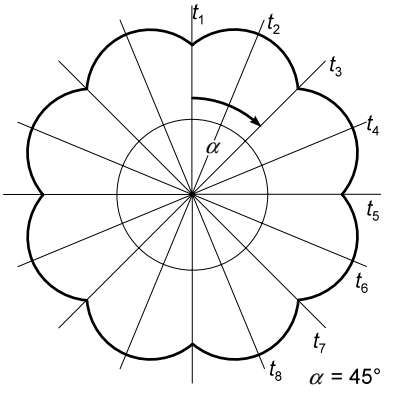


Ha egy alakzatnak pontosan két szimmetriatengelye van, akkor azok merőlegesek egymásra.

Ha egy alakzatnak két egymásra merőleges szimmetriatengelye van, akkor azok középpontosan is szimmetrikusak.

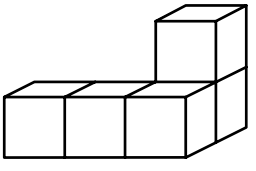
Ha egy véges alakzatnak több szimmetriatengelye van, akkor azok egy pontban metszik egymást.

Ha egy véges alakzatnak több szimmetriatengelye van, akkor forgásszimmetrikus.

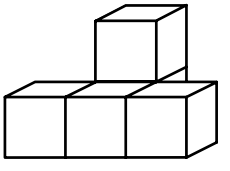


Építsenek a gyerekek testeket a színesrúdkészlet fehér kis kockáiból. A megépített testeket osztályozzák szimmetriasíkjaik száma szerint. Két kis kockát csak egyféleképpen illeszthetünk össze úgy, hogy egy-egy lapjuk teljesen fedje egymást. Ha ugyanilyen feltétellel három kis kockát illesztünk össze, akkor két különböző testet kaphatunk.

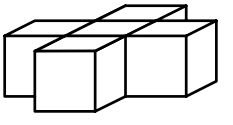
A **4.04.** feladatban öt-öt kis kockából építünk testeket. Megvizsgáltathatjuk, hogy hány szimmetriasíkjuk van ezeknek. *Például:*



nincs szimmetriasíkja



egy szimmetriasíkja van



öt szimmetriasíkja van

Tengelyesen tükrös háromszögek

A tengelyesen tükrös háromszögekről a tanulók már eddig is sokat tudhatnak. Tudják, hogy (mint minden háromszögnek) belső szögeinek összege $180°$, külső szögeinek összege $360°$; két oldal összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal. Ki tudják választani (szemlélet alapján) adott háromszögekből álló alaphalmazokból a tengelyesen tükröseket.

A tankönyvben összegyűjtött lényeges tulajdonságok mindegyike a tengelyes szimmetriával igazolható. Ezeket a tulajdonságokat az ábra mellé szimbólumokkal is lejegyeztük. Hangsúlyozzuk, hogy ez a lejegyzés az így betűzött egyenlő szárú háromszögre igaz, ha másképpen betűzzük a csúcsokat, akkor a lejegyzés is más lesz. Mutassunk erre is példát. Ne csak olyan helyzetben vizsgáljuk a szárak, az alapon fekvő belső szögek egyenlőségét, ahol az alap „vízszintes”. (Az „alap” elnevezést csak egyenlő szárú háromszögeknél használjuk, másoknál ne!)

A tulajdonságok szimbólumokkal való lejegyzésében szerezzenek a gyerekek jártasságot. Ez segíti a képi gondolkodás és a szaknyelv kölcsönös erősítését, a későbbi bizonyítások lejegyzésében pedig elengedhetetlen.

Állítsanak elő a gyerekek téglalapból, négyzetből is egyenlő szárú háromszöget.

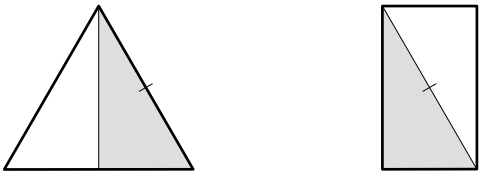
A téglalap egyik átlójával két derékszögű háromszögre bontható. Ezeket a befogók mentén összeillesztve (ha a téglalap nem négyzet, akkor kétféle) egyenlő szárú háromszöget kaphatunk. Az ilyen átdarabolás a későbbi területszámítás megértését is előkészíti.

Ha a téglalap négyzet, akkor az átdarabolás egyféle egyenlő szárú háromszöget eredményez.

Keressünk kapcsolatot a kapott háromszög és a feldarabolt téglalap, illetve négyzet adatai között.

Foglalkozhatunk a következő gondolatokkal is:

Melyik téglalap darabolható egyenlő oldalú háromszöggé? Amelyikben az átló kétszerese az egyik (a rövidebb) oldalnak.



Ha a téglalap belső szögeinek összege 360°, akkor az átdarabolás után miért 180° a belső szögek összege?

Hasonlítsuk össze a téglalap és a háromszög területét.

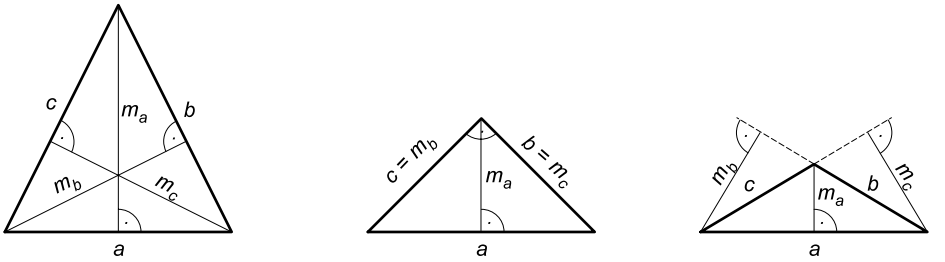
Hasonlítsuk össze a kerületüket.

Van-e olyan téglalap, amelynek azonos a kerülete az így átdarabolt egyenlő szárú háromszög kerületével?

Az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai között szó van az *alaphoz tartozó magasságról* is, hogy megértsék a gyerekek „az alaphoz tartozó” kifejezés szükségességét. A szárakhoz tartozó magasságokat meg is szerkeszthetjük, mint az adott pontból adott egyenesre merőleges egyenes szerkesztésének alkalmazását.

A három magasság az egyenlő szárú

hegyesszögű: derékszögű: tompaszögű háromszögben:

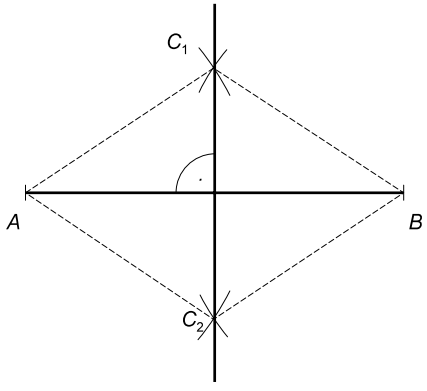


Tengelyes tükrös háromszögek szerkesztése (A bővített változatban szerepel.)

A *szerkesztések* között a tankönyv most nem említi a szögmásolást és a szakasz felezését, mivel ezekkel – a körrel, a szöggel és az azonos tulajdonságú pontok keresésével kapcsolatban – már többször is találkoztak a gyerekek. Mindkét szerkesztés helyessége igazolható az egyenlő szárú háromszög tulajdonságaival is.

Szögmásolásnál az AB sugarú körívvel egy egyenlő szárú háromszög szárait jelöljük ki. A BC húr (nem szoktuk meghúzni) pedig a háromszög alapja. Az ABC háromszög lemásolásával megkaptuk a CAB szöget is.

Szakaszfelezésnél adott szakaszra két egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk, a közös szimmetriatengelyük felezi a közös alapot, az adott szakaszt, és arra merőleges (a szárakat nem húzzuk meg).



A tengelyesen tükrös háromszögek szerkesztéséhez tartozó **2., 3.** példa megoldásának részletes leírása olyan tanácsokkal is szolgál, amelyek minden szerkesztési feladat megoldásában alkalmazhatók.

Vigyázzunk arra, hogy a *vázlatkészítés* és a szerkesztés megtervezése nem azonos lépés. A különböző vázlatokon jelöljük az ismert, illetve a keresett adatokat, megpróbáljuk meglátni az összefüggéseket, kipróbálunk bizonyos elképzeléseket, változatokat. *A terv a letisztult gondolatmenetet rögzíti* rajzos formában.

Még akkor se maradjon el *a megoldás igazolása* és *a diszkusszió,* ha úgy érezzük, hogy szorít az idő. Hatásosabban és sokkal komplexebben megvalósíthatjuk a matematikai gondolkodásra és problémamegoldásra nevelést néhány feladat teljes kidolgozásával és alapos megtárgyalásával, mint több feladat felületes „megoldásával".

A diszkusszió során vizsgáljuk például:

van-e a feladatnak megoldása, hány megoldása van;

vannak-e ellentmondó adatok, van-e felesleges adat;

egyszerűsíthető-e a megoldás, van-e más megoldásmenet;

levonhatók-e általános következtetések, megvizsgáltuk-e a speciális eseteket stb.

A szerkesztés helyességének igazolása és egyéb megfigyelések nemcsak az adott feladat helyes megoldása miatt fontos, hanem az összetettebb feladatokban az összefüggések meglátása, a matematikai nyelv fejlesztése miatt is.

Tükrös háromszögek területe (A bővített változatban szereplő fejezet.)

A tanulók már 5. osztályban, sőt alsóbb évfolyamban is le tudják olvasni a négyzetrácsra rajzolt háromszögek, négyszögek területét. Most is felhasználjuk ezeket a tapasztalatokat, és a húrtrapéz területének meghatározásánál nem is lépünk túl ezen.

Arra törekszünk, hogy a háromszögek területének kiszámítását visszavezessük már jól megértett és begyakorolt ismeretre, a téglalap területének kiszámítására. A tengelyesen

szimmetrikus háromszögeket kiegészítjük vagy átdaraboljuk téglalappá. Megállapítjuk a kapott téglalap és az eredeti háromszög adatai, méretei közötti kapcsolatot, és ebből megfogalmazzuk a kiszámítás módját. A megfogalmazást képletben rögzítjük. Önmagában a képlet ismerete nem igazi tudás. Kell, hogy a gyerek meg tudja magyarázni, hogy a képlettel leírt összefüggés miért igaz.

Az egyenlő szárú háromszög (jobb csoportban a deltoid és speciálisan a rombusz) esetén érjük el, hogy *a tanulók képessé váljanak az általános szabály megfogalmazására, értelmezésére és alkalmazására.*

Szabályos sokszögek. Szabályos testek (A bővített változatban szereplő fejezetek.)

A szabályos sokszögekről a 2. fejezetben is volt szó. A középponti háromszögek kapcsán találkoztunk olyan sokszögekkel, amelyek köré kör írható, és egybevágó középponti háromszögekre bonthatók. Oldalaik, szögeik egyenlők. Most is a körből kiindulva tárgyaljuk a szabályos sokszögeket, így tengelyes szimmetriájuk egyszerűbben igazolható, és a tengelyes szimmetria mellett a forgásszimmetriát is megfigyeltethetjük.

Vetessük észre, hogy vannak olyan sokszögek, amelyeknek minden oldaluk vagy minden szögük egyenlő, és mégsem szabályos sokszögek. A két feltételnek egyszerre kell teljesülnie.

Az érdeklődés felkeltése céljából minden osztályban megmutathatjuk az öt *szabályos testet*. (Az elnevezéseket semmiképp se követeljük meg.) Vizsgálhatjuk, hogy milyen szabályos sokszögekből állnak lapjaik, hány lapjuk, csúcsuk, élük van. Mutathatunk olyan nem szabályos testeket is, amelyeknek minden lapjuk egybevágó szabályos sokszög. Ilyen testeket kis kockákból a tanulók is felépíthetnek.

Tengelyesen tükrös négyszögek
A deltoid.
A rombusz
A húrtrapéz (Bővített változatban szereplő fejezet.)

Az emlékeztetőben a négyszögeket abból a szempontból rendezzük, hogy van-e párhuzamos oldalpárjuk. Erre az osztályozásra azért van szükségünk, mert a húrtrapéz fogalmának bevezetésekor építünk a trapéz és a paralelogramma fogalmára. Ezeket majd 7. osztályban még egyszer, ennél részletesebben is tanítjuk az egyéb egybevágósági transzformációk (eltolás, forgatás, középpontos tükrözés) kapcsán.

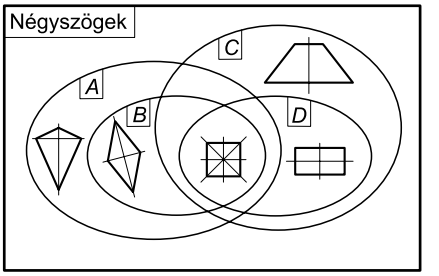
A tengelyesen tükrös négyszögekről, elsősorban a téglalapról, négyzetről már eddig is sok tapasztalatot szereztek a tanulók. Most abból a szempontból vizsgáljuk a négyszögeket, hogy van-e a csúcsain átmenő szimmetriatengelye, és van-e a csúcsain nem átmenő szimmetriatengelye. Az előbbiek a deltoidok, az utóbbiak a húrtrapézok.

Ha a deltoid mindkét átlóegyenese szimmetriatengely, akkor az rombusz. Ha a húrtrapéznak két – csúcsain át nem menő – szimmetriatengelye van, akkor az téglalap.

Ha a négyszög deltoid is és húrtrapéz is, akkor az négyzet.

Ezt az osztályozást a következő halmazábrával szemléltethetjük:

A címkék jelentése:
A: Van csúcsain átmenő szimmetriatengelye.
B: Két olyan szimmetriatengelye van, amelyek a szemközti csúcson mennek át.
C: Van csúcsain át nem menő szimmetriatengelye.
D: Két olyan szimmetriatengelye van, amely oldalfelező merőleges.



Az adott halmazok közös részébe az a négyszög kerül, amelynek négy szimmetriatengelye van. Ez a négyszög a négyzet.

A tankönyv feldolgozása szerint így jutunk el a négyszögek halmazában az egyre speciálisabb négyszögekig.

Néhány más könyvben a *húrtrapéz* elnevezés helyett „egyenlő szárú trapéz” vagy „szimmetrikus trapéz” található. Ebbe a fogalomba a paralelogramma is belefér (egyenlő szárú és középpontosan szimmetrikus). A „tengelyesen tükrös trapéz” sem mond eleget, mert a rombusz is tengelyesen szimmetrikus.

A kör szimmetriája miatt viszont igaz, hogy ha két párhuzamos húr szomszédos végpontjait páronként összekötjük, akkor olyan trapézt kapunk, amelynek van csúcsain át nem menő tengelye, ezért húrtrapéznak nevezhetjük.

A deltoidok és a húrtrapézok halmazának uniójába beletartozik az összes tengelyesen szimmetrikus négyszög.

Tengelyesen tükrös négyszögek szerkesztése (A bővített változatban szerepel.)

Az egyes tükrös négyszögek szerkesztésénél *„jól megválasztott”* adatokról van szó. Ennek a mondatnak a tartalmát bővebben csak igen körülményesen lehetne leírni a tankönyvben, még hiányoznak az ehhez szükséges ismeretek is. Ezért a részletesebb megfogalmazás nem segítené a megértést. A „jól megválasztott” adatokból mindig szerkeszthető az éppen említett négyszög.

Négyszögek belső szögei (A bővített változatban szerepel.)

A négyszöget egy átlójával két háromszögre bontva bizonyítható, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°. Erre az ismeretre támaszkodva felismerhetik a tanulók, hogy a trapéz egyik szárán fekvő két belső szög összege 180°.

A deltoid területe (A bővített változatban szereplő fejezet.)

Jobb csoportban a deltoid és speciálisan a rombusz területét is meghatározhatjuk.

A konvex deltoid területe két közös alapú, egyenlő szárú háromszög területének az összege; a nem konvex deltoid területe két közös alapú, egyenlő szárú háromszög területének a különbsége.

5. Nyitott mondatok

Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását – ahogy a tanulók ismeretanyaga, szám- és műveletfogalma bővült – egész évben folyamatosan gyakoroltattuk. Így a tanév folyamán sok tapasztalat halmozódott fel, amelyet érdemes összegezni, rendszerezni és összekapcsolni a racionális számokkal végzett műveletekről, az arányról, a százalékról tanultakkal. Itt integráljuk az eddig szerzett tudást, tudatosítjuk az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának módjait, rámutatunk az *alaphalmaz* és az *igazsághalmaz* szerepére. Közben minden témakörrel megteremthetjük a koncentrációt, ezzel gyakoroltathatjuk és megszilárdíthatjuk a racionális számokkal végzett műveletekről, illetve mérésekről, mértékegységekről tanultakat.

A tervezésnél vegyük figyelembe a következőket!

Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának az elsajátításában *nagy különbségek lehetnek* a hatodik évfolyamot végző osztályok között. Azokban az osztályokban, amelyekben ötödik osztály év elején az elemi számolással, a legegyszerűbb szöveges feladatok értelmezésével és megoldásával is gondok voltak, kevés időt fordíthattunk eddig a nyitott mondatokra. Súlyosbíthatta a helyzetet, ha 140-nél kevesebb matematikaórát sikerült ténylegesen megtartanunk. Növekedhet az időigény amiatt is, hogy tanulóink bizonytalanul hajtják végre a műveleteket a negatív számok és a törtek körében. Ezekben az esetekben most több órát kell szánnunk erre a témakörre.

A fogalomrendszert a tananyag-feldolgozás során részletesen áttekintjük, itt csak néhány általános megjegyzéssel egészítjük ki az ott leírtakat.

Alsó tagozattól kezdve sok „nyitott mondattal" találkozott a tanuló, így szemléletes szinten kialakítottuk ezt a fogalmat anélkül, hogy definiáltuk volna. A „nyitott mondat" az egyenlet, egyenlőtlenség fogalmának megközelítését segíti elő, ezért elsősorban a fogalomkör kialakításának a kezdeti szakaszában van szükségünk erre a fogalomra. (Azért sem törekedhetünk a „nyitott mondat" fogalmának egzakt értelmezésére, mert az olyan matematikai logikai ismereteket tételezne fel, amelyekkel csak a felsőfokú oktatásban foglalkozunk.)

Konkrét egyenletek, egyenlőtlenségek felírása, megoldása, elemzése során használhatjuk az „*ismeretlen*" és a „*kifejezés*" elnevezéseket is, de ezen a fokon nem célszerű definiálnunk ezeket a fogalmakat sem. A fogalmak konkrét példákhoz kapcsolódó megismerése előkészíti és a tanuló számára (a későbbiekben!) magától értetődővé teszi az egyenlet, egyenlőtlenség értelmezését.

Egyenletet kapunk, ha két kifejezést egyenlőségjellel (=) kapcsolunk össze.

Egyenlőtlenséget kapunk, ha két kifejezést a kisebb ($<$), kisebb vagy egyenlő ($\leqq$), nagyobb ($>$), nagyobb vagy egyenlő ($\geqq$) jelek valamelyikével kapcsolunk össze.

Az átlagosnál gyengébb osztályokban ne a fogalmak minél pontosabb értelmezése legyen az elsődleges célunk. Fontosabbnak tartjuk az egyenletmegoldás elemeinek az elsajátítását és *begyakorlását*.

Hatodik osztályban az év végén olyan egyenletek megoldását várhatjuk el, amelyeket két-három lépésben megoldhat a tanuló. A *fokozatosság elvét* szigorúan szem előtt tartva, *jobb csoportban* foglalkozhatunk olyan egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel is, ame-

lyekben közös nevezőre kell hoznunk, illetve amelyekben alkalmaznunk kell az összeg, különbség szorzását, osztását, kivonását. Az ilyen összetettebb egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása *ne legyen követelmény,* csupán előkészítő jellegű tananyag.

A témakörre 10–16 órát szánjunk, de ne tekintsük megoldottnak az ezzel kapcsolatos didaktikai feladatokat. Az egyenletek, egyenlőtlenségek tanítása *az általános iskola felső tagozatának végig kiemelt feladata.* A tanulók képességeit figyelembe véve, három év távlatában tervezve döntsük el, hogy melyik évben milyen mélységben foglalkozzunk a fogalmakkal, milyen típusú és mennyire összetett feladatok megoldását követeljük meg.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Felelevenítjük, tudatosítjuk és megszilárdítjuk a *nyitott mondat, egyenlet, egyenlőtlenség, alaphalmaz, nyitott mondat megoldása, igazsághalmaza, azonosság, azonos egyenlőtlenség* fogalmakat.
2. Két-három lépésben megoldható egyenletekkel gyakoroljuk a műveletek közti összefüggések alkalmazását, a „lebontogatást". Alkalmazzuk (és így gyakoroltathatjuk) a racionális számokkal végzett műveletekről tanultakat.
3. Szemléletes szöveges feladatok megoldásával, esetleg eszközök (például: mérlegmodell, logikai lapok) segítségével, megalapozzuk a „mérlegelv" tanítását.
4. Egyszerű, a gyerekek számára szemléletes szöveges feladatokkal fejlesztjük tanulóink szövegelemző képességét.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Az alaphalmaz, igazsághalmaz fogalma; üres halmaz, részhalmaz. Halmaz részhalmazainak megadása nyitott mondattal.

A racionális számok részhalmazainak az áttekintésekor, valamint az egyenletek, egyenlőtlenségek igazsághalmazának vizsgálatában alkalmazzuk a halmazokról tanultakat.

A számtan, algebra egyéb témakörei

Minden órán újra és újra tudatosíthatjuk a következő ismereteket: a természetes szám, egész szám, racionális szám fogalma, számok abszolútértéke, ellentettje; számok ábrázolása számegyenesen; racionális számok nagyság szerinti összehasonlítása; a racionális számok körében eddig tanult műveletek.

A lebontogatás a műveletek közti összefüggések (művelet és inverze) alkalmazása.

Az egyenletek megoldása és ellenőrzése során tudatosítjuk a műveletvégzés helyes sorrendjét, a zárójelek jelentését.

Mérés, geometria

Geometriai ismeretekhez kapcsolódó nyitott mondatok (**5.03.** feladat).
Hosszúság-, tömeg- és időméréshez kapcsolódó szöveges feladatok.
Kerület-, terület-, térfogatszámításhoz kapcsolódó feladatok.

Tanmenetjavaslat

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
1–2. **1–2.**	*Nyitott mondat, egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség, azonos egyenlőtlenség.* Egyenletek, egyenlőtlenségek igazsághalmazának meghatározása adott alaphalmazok esetén (elsősorban tervszerű próbálgatással). Műveletek racionális számokkal; abszolútérték. Halmazok, logika. Geometria.	Tk. 5.01–5.05.; Gy. 6.01–6.13.
3–4. **3–4.**	*Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása* két-három lépésben a *műveletek közti összefüggések alkalmazásával.* Műveletek racionális számokkal. Az összeadás és kivonás, illetve a szorzás és osztás közti összefüggés. Szövegértelmezés, szöveg fogalmazása egyenlethez.	Tk. 5.06–5.09.; Gy. 6.14–15.
5–6. **5–7.**	*Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása* a két oldal egyenlő változtatásával. („Irányított felfedeztetés”: logikai lapok, mérlegmodell, esetleg konyhai mérleg használata.) Műveletek racionális számokkal. Mértékegységek.	Tk. 5.10–5.12.; Gy. 6.16–6.24.
7–8. **8–10.**	*Szöveges feladatok.* Táblázatok, rajzos modellek készítése a szöveg alapján. A megoldás ellenőrzése. Arányosság. Geometriai számítások; kerület-, terület-, térfogatszámítás. Fizikai példák.	Tk. 5.13–5.16.; Gy.6.34–6.62.
9–10. **11–14.**	*Átlagos vagy átlagosnál gyengébb csoportban:* *Gyakorlás:* egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. *Jobb csoportban:* *Tizedestört, illetve tört együtthatójú egyenletek, egyenlőtlenségek,* azonosságok, azonos egyenlőtlenségek megoldása. Az igazsághalmaz ábrázolása számegyenesen. *Differenciált munkában* ismerkedés egyszerűbb algebrai átalakítást igénylő egyenletek megoldásával.	Tk. 5.17–5.22.; B5.01–B5.23.; Fgy. 5.4.01–19.
11–13. **15–17.**	*Gyakorlás.* **6. felmérés.** Értékelés, a felzárkóztatás megszervezése.	Tk. 5.23.; B5.24.; Gy. 10.07. Felmérő feladatsorok

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Nyitott mondat, egyenlet, egyenlőtlenség, azonosság

A nyitott mondat fogalmát nem értelmezzük, lényegében alapfogalomnak tekintjük. Amikor a tanulók már látják az összefüggéseket, akkor az egyenletet, egyenlőtlenséget célszerű nevén nevezni, és a „nyitott mondat" elnevezést fokozatosan elhagyni. Azonban a fogalmak tisztázása céljából érdemes áttekintenünk ezt a fogalomrendszert.

A tények közlésére kijelentő mondatokat használunk. A kijelentő mondatokban bizonyos dolgokról állítunk valamit. Amit állítunk, azt *predikátumnak*, s amiről állítunk, azt *individuumnak*, nevezzük. A logikában a kijelentő mondatot akkor tekintjük kijelentésnek (ítéletnek), ha a benne szereplő individuumok és predikátum egyértelműen meghatározottak, valamint (azon a tárgyaláson belül) egyértelműen eldönthető, hogy a kijelentés igaz vagy hamis.

Fontosak azok a vizsgálatok, amelyekben egy (vagy több) alaphalmaz minden eleméről eldöntjük, hogy az állítás ezekre az elemekre igaz, vagy hamis. Ezekben az állításokban az individuum helyett *individuumváltozó* szerepel, amelyet *névpótló jellel* (betűszimbólummal, kipontozással, kerettel stb.) jelölünk.

Az olyan állítást, amelyekben individuumváltozó szerepel, *nyitott mondatnak* nevezzük.

A nyitott mondat logikai értelemben nem kijelentés, mert önmagában se nem igaz, se nem hamis. A nyitott mondatból úgy kapunk kijelentést, hogy az individuumváltozó helyére behelyettesítjük az alaphalmaz egy elemét. Egyes elemeket behelyettesítve a nyitott mondatba hamis kijelentéseket, más elemeket behelyettesítve igaz kijelentéseket kapunk. Ez utóbbi elemek a nyitott mondat *megoldásai*. A megoldások halmaza az *igazsághalmaz* vagy *megoldáshalmaz*.

Ha a megoldáshalmaz megegyezik az alaphalmazzal, akkor *azonosságról,* illetve *azonos egyenlőtlenségről* beszélünk.

Tudatosítsuk, hogy az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásához ismernünk kell az *alaphalmazt.* Állapodjunk meg abban, ha nem adjuk meg külön az alaphalmazt, akkor *a tanult számok halmazát* (jelen esetben a racionális számok halmazát) tekintjük annak. Lássák be a gyerekek azt is, hogy ugyanannak a nyitott mondatnak más lehet a megoldása, ha más az alaphalmaz.

Fontosnak tartjuk az egyenletek, egyenlőtlenségek tervszerű próbálgatással történő megoldását, mert

- elősegítheti a fogalmak megértését, tisztázását;
- megalapozza a becslést és a módszeres megoldások ellenőrzését;
- előkészítheti a műveletek közti összefüggések és a műveleti tulajdonságok alkalmazását;
- felkészíti a tanulót az olyan egyenletek, egyenlőtlenségek megoldására is, amelyeket lebontogatással, illetve a mérlegelv alkalmazásával nem tudunk megoldani.

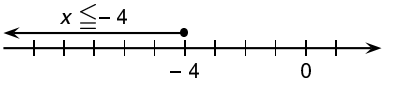
Az **5.05.** *e), f),* feladat egyenleteivel mintegy példát adhatunk a lebontogatás és a mérlegelv alkalmazásainak korlátaira.

Tudatosítsuk, hogy a szorzás tényezőinek felcserélhetősége miatt a $3 \cdot x$ és az $x \cdot 3$ ugyanazt jelenti.

Jobb csoportban megállapodhatunk abban, hogy ezt jelölhetjük így is: $3x$.

Az egyenlőtlenségek megoldásának ellenőrzését is a *tervszerű próbálgatással* készíthetjük elő. *Például:* $5 \cdot x + 13 \leqq 3 \cdot x + 5$.

Valamilyen módon eljutunk a megoldáshoz, és a megoldáshalmazt számegyenesen ábrázoljuk.



Tele karikával jelöljük, hogy a – 4 is hozzátartozik az igazsághalmazhoz (üres karikával jelölnénk, ha nem tartozna hozzá).

A számegyenes fölé (alá) húzott félegyenessel vagy a számegyenes megfelelő részének megvastagításával szemléltetjük, hogy a számegyenesnek ezen a részén lévő, az *alaphalmazba* tartozó számok adják a megoldáshalmazt. Az ellenőrzés során „bizonyítjuk", hogy valóban ez az igazsághalmaz.

Az $x = -4$ behelyettesítése igazolja, hogy valóban a – 4 az igazsághalmaz határa.

Ha – 4-nél 1-gyel, 2-vel, 3-mal … kisebb értéket helyettesítünk be, akkor a bal oldal 2-vel, 4-gyel, 6-tal kisebb, mint a jobb oldal. Az egyenlőtlenség bal oldala „jobban csökken", mint a jobb oldala, tehát a – 4-nél kisebb számokra a bal oldal mindig kisebb, mint a jobb oldal. Ezek a számok elemei az igazsághalmaznak.

Ha – 4-nél 1-gyel, 2-vel, 3-mal … nagyobb értéket helyettesítünk be, akkor a bal oldal 2-vel, 4-gyel, 6-tal nagyobb, mint a jobb oldal. Az egyenlőtlenség bal oldala „jobban nő", mint a jobb oldala, tehát a – 4-nél nagyobb számok nem elemei az igazsághalmaznak.

Hangsúlyozzuk, hogy az igazsághalmaz határaként kapott érték(ek)hez „közel eső" nagyobb és kisebb számokkal ellenőrizzenek, mert például vannak olyan (nem lineáris) egyenlőtlenségek, amelyeknél hibás megoldást is „bizonyíthatunk", ha sokkal nagyobb vagy kisebb számokkal próbálkozunk.

Még a jobb matematikai képességekkel rendelkező gyereket is meghökkentheti, ha az egyenletmegoldás során nyilvánvaló azonossághoz vagy ellentmondáshoz jut. *Például* az **5.05.** *g)* és *h)* feladatban: $2x + 3 = 2x + 5$, illetve $3x - 3 = 3x - 3$.

Ezért tisztázzuk, hogy az igazsághalmaz esetenként megegyezhet az alaphalmazzal, *például* a $3 \cdot (x - 3) = 3 \cdot x - 3$ egyenlet esetén. Más esetben, *ha az adatok között ellentmondás van, akkor az igazsághalmazba egy elem sem tartozik.*

Például a $2x + 3 = 2x + 5$ egyenletnek az *üreshalmaz* az igazsághalmaza.

Ha a tanuló észreveszi, hogy az egyenlet azonosság (vagy egyáltalán nincs megoldása), akkor célszerű megvizsgáltatni, hogy milyen feltétel következménye ez, más alaphalmaz esetén is ezt kapnánk-e stb.

A műveletek közti összefüggések alkalmazása

A műveletek értelmezésétől kezdve (1–2. osztály) folyamatosan fejlesztjük a tanulók egyenletekkel kapcsolatos ismereteit. A kezdeti szakaszban az egyenletek megoldása egy lépésben történik.

A műveletek közti összefüggéseket úgy tudatosíthatjuk, hogy olyan számokkal dolgozunk (nagy számok, törtek, negatív számok), amelyekkel már „ránézésre" sem boldogul a tanuló. Ezeket az összefüggéseket például a tankönyv **5.06–5.07.** feladatával eleveníthetjük fel. Ha bizonytalannak érezzük a gyerekek ismereteit, akkor föltétlenül szánjunk az ilyen egyszerű feladatok megoldására, *az alapműveletek ellenőrzésének a gyakorlására* legalább egy órát. Ellenkező esetben ezekkel a feladatokkal otthoni munkában is előkészíthetjük az összetettebb feladatok megoldását.

A tanuló csak akkor válhat képessé összetettebb egyenletek felírására, illetve megoldására, ha tisztában van a *műveleti sorrenddel* és a *zárójelek jelentésével.* Ezért fontosnak tartjuk a következőhöz hasonló elemzéseket:

$$4 \cdot \left(\frac{x}{3} - 2\right) = 8.$$

Milyen sorrendben, milyen műveleteket végzünk az x számmal?

$$x \xrightarrow{:3} \frac{x}{3} \xrightarrow{-2} \left(\frac{x}{3} - 2\right) \xrightarrow{\cdot 4} \underbrace{4 \cdot \left(\frac{x}{3} - 2\right)}_{8}$$

Első lépésben osztjuk az x-et 3-mal, második lépésben kivonunk a hányadosból 2-t, a harmadik lépésben szorozzuk a különbséget 4-gyel, így 8-at kapunk.

Az ismeretlen x számot úgy kaphatjuk meg a végeredményből, hogy fordított sorrendben végrehajtjuk a műveletek *fordított műveleteit* (a „lebontogatás” módszere).

$$12 \xleftarrow[\cdot 3]{} 4 \xleftarrow[+2]{} 2 \xleftarrow[:4]{} 8$$

Ilyen elemzést a kidolgozott **1.** példában mutatunk be, és a tankönyv **5.08., 5.09.** feladata is ezt a célt szolgálja. Hasonló feladatokat óra eleji „bemelegítésként” is adhatunk. Legjobb, ha a gyerekek otthoni munkában maguk készítenek ilyen feladatokat, és ők adják fel azokat a többieknek. (Ilyenkor fontos a tanári ellenőrzés.)

A műveletekkel kapcsolatos elnevezéseket a jobbak is sokszor igen bizonytalanul tudják, így ezt is gyakoroltathatjuk.

Ha *az egyenletnek csak az egyik oldalán szerepel ismeretlen,* akkor a lebontogatást (hatodik osztály év végén) a legtöbb tanuló két-három lépésben képes követni. Ennél összetettebb feladatok megoldását ezzel a módszerrel ne erőltessük.

Az egyenlet, egyenlőtlenség két oldalának egyenlő változtatása

Az olyan egyenleteket, egyenlőtlenségeket, amelyekben mind a két oldalon van ismeretlen, általában a **mérlegelv** alkalmazásával képesek megoldani a tanulók. Ezért a továbbiakban elsősorban a mérlegelvnek, vagyis *a két oldal egyenlő változtatásának* tapasztalati megalapozására és begyakoroltatására törekedjünk.

Két egyenletet, egyenlőtlenséget – adott alaphalmazon vizsgálva – ekvivalensnek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk megegyezik. A matematikai pontosság érdekében hozzá kell tennünk, hogy a két egyenletben mindegyik gyökük ugyanannyiszoros gyökként szerepel, ám ez utóbbi kérdésre az általános iskolában egyáltalán nem térünk ki.

A két oldal egyenlő változtatásán az ekvivalens átalakításokat, azon belül az azonos átalakításokat értjük.

Azonos átalakítás például a zárójelbontás vagy az összevonás, továbbá a törtek közös nevezőre hozása. A zárójelbontás a disztributív törvény alkalmazását kívánja meg, míg az összevonás feltételezi az egynemű és a különnemű algebrai kifejezések ismeretét. Ez viszont csak 8. osztályban szerepel tananyagként, tehát csak előkészítő jelleggel és konkrét esetekben kell ezekkel foglalkoznunk.

Ekvivalens átalakításnak nevezzük azt, amely nem változtatja meg az egyenlet, egyenlőtlenség igazsághalmazát. Ekvivalens átalakítás minden azonos átalakítás, továbbá ha az egyenlet, egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadjuk vagy mindkét oldalából elvesszük ugyanazt a számot vagy (az alaphalmazon mindenütt értelmezett) kifejezést, illetve mindkét oldalát szorozzuk vagy osztjuk ugyanazzal a 0-tól különböző számmal.

Jó, ha olyan példát is adunk, ahol 0-val szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát, s a tanulók ráébrednek, hogy minden ilyen esetben 0 = 0, azaz azonossághoz jutunk, és nem az eredeti egyenletünk megoldásához. Ezért nem „szerencsés" 0-val szorozni az egyenlet mindkét oldalát, míg osztani azért nem lehet, mert a 0-val való osztást nem értelmezzük.

Az egyenletek tanítására minden tanterv nagy hangsúlyt fektetett és fektet. Ennek ellenére (a felmérések ezt egyértelműen kimutatták) a tanulóknak mintegy a fele még nyolcadik osztályban, év végén is nagyon bizonytalan tudással rendelkezik ezen a téren. A következőkben megvizsgáljuk a sikertelenség okait és a hibák megelőzésének a lehetőségét. Tegyük hozzá, hogy a felsorolt okok általában halmozottan jelentkeznek.

1. *A tapasztalati megalapozás hiányában* a tanuló „nem látja" a két oldal egyenlő változtatásának a lényegét. Esetleg „tudja a szabályokat", de a konkrét egyenletre, egyenlőtlenségre nem képes ezeket alkalmazni, még segítséggel sem jut el a megoldáshoz. Ezt a hibát csak úgy előzhetjük meg, ha a mérlegelvet (6. osztályban) a tárgyi tevékenységre épülő felfedeztetés módszerével tanítjuk. Nem tartjuk elegendőnek a tanári demonstrációt (ennél már csak az lehet rosszabb, ha időhiány miatt még a tanári demonstráció is elmarad). A kétkarú konyhai mérleggel vagy mérlegmodellel maguk a tanulók dolgozzanak (tanulópárokban vagy négy-öt fős csoportokban). Később helyettesíthetjük a mérlegmodellt „absztraktabb", de még mindig eszközhasználatot feltételező modellekkel és szemléletes rajzos feladatokkal (ilyenek a tankönyv kidolgozott példái és az **5.10.** feladat). A módszerből fakadó időveszteség bőven megtérül a későbbiekben, hiszen kellő alapozás nélkül a tanulóink nagy része hetedik, nyolcadik osztályban reménytelen szélmalomharcot folytat.
2. *A műveleti sorrend alkalmazásában és a zárójelek használatában* bizonytalan a tanuló, ezért képtelen eldönteni, hogy mi lehet a soron következő lépés. (Már az előző rész tárgyalása során is utaltunk erre.) A fokozatosság, a kis lépésekben történő előrehaladás elvét betartva remélhetjük ezeknek a gondoknak a kiküszöbölését.

   Hatodik osztályban csak az előkészítés igényével foglalkozzunk összetettebb egyenletekkel, de éppen a fokozatosság elve miatt ne hagyjuk ki teljesen az ilyen feladatokat.
3. Ha jó lépés mellett dönt a tanuló, akkor is hibázhat, mert *bizonytalanul hajtja végre a műveleteket.* Elsősorban a negatív számok kivonása, szorzása, osztása és a törtek összeadása, kivonása jelent gondot. Ha 5. osztályban és 6. osztály év elején (eszközhasználattal, például a kisautós modellel, színesrudakkal) szemléletileg megalapoztuk a műveleteket, majd kellően begyakoroltattuk azokat, akkor ezek a gondok kevésbé jelentkeznek. Segítséget jelenthet az is, ha a mérlegelvet fokozatosan terjesztjük ki a törtekre és a negatív számokra. Ennek a folyamatnak a gerincét alkothatja az első három mintapélda feldolgozása. Szükség esetén újra és újra elő kell vennünk a modelleket.
4. A *figyelmetlenségből és a koncentrálóképesség hiányából* eredő hibák. Ezek végső oka, az esetek döntő hányadában, *a gyakorlásra fordított kevés idő.* Ezért is hangsúlyozzuk, hogy az egyenleteket egész évben építsük be a folyamatos ismétlésbe, szinte minden órán adjunk ebből a témakörből házi feladatot.

Hatodik osztályban *a mérlegelvet általánosan ne fogalmaztassuk meg,* és ne követeljük meg az ekvivalens átalakítás szabályait sem.

Elegendő, ha a tanuló a gyakorlatban képes a legegyszerűbb lépéseket biztonságosan végrehajtani. Vagyis konkrét egyenlet megoldása során például észreveszi, hogy lehetséges és célszerű az egyenlet mindkét oldalához 6-ot vagy $2 \cdot x$-et hozzáadni.

A fejezet zárópéldája (**5.** példa) arra hívja fel a figyelmet, hogy az egyenleteket többféle módszerrel is megoldhatjuk. A vizsgálatok azt mutatják, hogy *a tanulók jelentős része egyes lépéseket a mérlegelv alapján, másokat a lebontogatás elvei szerint képes végrehajtani. Ezért nem célszerű egy módszerhez ragaszkodnunk. A tanuló a saját belátása szerint akár váltakozva is alkalmazhatja a két módszert.*

Szöveges feladatok megoldása egyenlettel

A korábbi fejezetek mindegyikében előfordult szöveges feladat, és a tanulók jelentős részének gondot jelentett a szöveg értelmezése és a matematikai modell megtalálása. A szöveges feladatok megoldása többek között azért nehéz, mert a szövegben elrejtett állítások elemzése, az adatok közti összefüggések megtalálása figyelmes és fegyelmezett munkát igényel, továbbá logikus gondolkodást és az ismeretek alkotó, kombinatív alkalmazását.

Következetesen követeljük meg a tervkészítést, a becslést és az ellenőrzést. Ugyanis legtöbbször éppen ezek a fázisok maradnak el, amelyek pedig leginkább fejleszthetik a tanulók matematikai képességeit.

A *tervkészítés* azért fontos, mert így tudjuk ellenőrizni, hogy a tanulók tudatos matematikai tevékenységet folytattak-e, vagy csak – véletlenszerűen – műveleteket végeztek. A szöveges feladatokban gyakran sokkal nehezebb megtalálni a helyes műveleteket, mint ezeket elvégezni.

A *becslés* nagyon nehéz (nem azonos a tippeléssel), ezért gyakran elmarad a feladatok megoldása során. Mindig csak nagyságrendi becslésre törekedjünk, és a megoldás után hasonlíttassuk össze a becsült értéket az eredménnyel. *Jelzi a szöveg helyes értelmezését, ha a tanuló megfelelő becslést tud adni az eredményre.*

Az *ellenőrzésnek* kettős funkciója van. Egyrészt meg kell vizsgálnunk, hogy a kapott eredmény megfelel-e a matematikai tartalomnak, másrészt elképzelhető-e a gyakorlatban ilyen eredmény. A szöveges feladatot mindig a szöveg alapján ellenőriztessük. Hívjuk fel a tanulóink figyelmét arra, hogy szükséges lehet a szöveg átgondolt értelmezése az ellenőrzés során (lásd **2.** példa).

Figyeljünk a következő módszertani kérdésekre:

a) Célszerű lenne olyan (viszonylag összetett) szöveges feladatokkal elkezdeni a témakör tanítását, amelyekre az egyenletek felállítása és megoldása a legegyszerűbb módszer. Ugyanakkor (a fokozatosság miatt) kezdetben ezeknél egyszerűbb, következtetéssel is megoldható feladatokkal kell foglalkoznunk. Az ilyen feladatokat érdemes egyenletek segítségével és következtetéssel is megoldatni. Nagyon hasznos lehet a kétféle megoldás összehasonlítása.

b) Az alaphalmazt a feladat szövege alapján kell megadnunk. Ha az alaphalmaz nem állapítható meg egyértelműen, akkor a megoldást diszkutáljuk a lehetséges alaphalmazok szerint.

c) Az általános iskolában általában olyan feladatokkal foglalkozunk, amelyek egyismeretlenes egyenletre vezetnek. A tanulók feltétlenül *rögzítsék írásban,* hogy milyen mennyiséget (a hozzá tartozó mértékegységgel) tekintünk ismeretlennek, mivel jelöljük azt, a többi mennyiség hogyan fejezhető ki ugyanezzel a változóval.

d) Az egyenletek felállítása matematikai modellalkotás. Különböző mennyiségek közötti összefüggéseket kell a szöveg alapján kideríteni, és algebrai formába önteni. A legtöbb tanulónak komoly nehézséget jelent a szöveg elemzése. Ezt segítendő (például írásvetítővel) feltétlenül közösen elemezzünk néhány szöveges feladatot:

függőleges vonalkákkal tagoljuk a szöveget a tartalom szerint;

karikázzuk be (például) pirossal az alapul választott ismeretlen mennyiséget;

húzzuk alá pirossal azokat a mennyiségeket, amelyeket az alapul választott ismeretlen mennyiség segítségével kifejezhetünk;

húzzuk alá (például) kékkel az ismert mennyiségeket;

húzzuk át a felesleges adatokat;

a szöveg alapján készítsünk rajzot, táblázatot.

e) Figyeljünk a szóbeli kifejezőképesség fejlesztésére is. A közös munkával megoldandó feladatokat a feladat elolvasása után egy-egy tanuló mondja el a saját szavaival. Az egyéni munkában vagy házi feladatként kapott feladatok megoldását szóban is ismertessék a gyerekek. Az esetleges hibákat elsősorban a többiekkel javíttassuk.

f) A tanulóknak még egyszerű összefüggések felismerése esetén is gondot jelenthet a „fordított szövegezésű" feladatok értelmezése, a szükséges és felesleges adatok szétválasztása, a megoldás realitásának eldöntése.

g) Ha lehetőség nyílik rá, akkor vizsgáljuk meg, hogy választhatjuk-e másképp is az ismeretlent. Mutassunk rá, hogy ugyanahhoz a feladathoz több egyenlet is tartozhat, ha más mennyiséget tekintünk ismeretlennek, megnézhetjük, hogy egyszerűbb vagy bonyolultabb egyenlethez jutunk-e így.

h) A feltett kérdésekre írásban válaszoljon a tanuló. Minden ismeretlen mennyiséget adjon meg, ne csak az alapul választottat.

i) Fejlesztheti tanulóink problémameglátó képességét, ha felállított egyenletekhez, egyenlőtlenségekhez fogalmaztatunk szöveget.

Lásd dr. Faragó László Szöveges feladatok megoldása egyenlettel című könyve.

Gyakorló feladatok

Gyakoroljuk az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását! (A bővített változatban.)

E két fejezet nagyrészt a folyamatos ismétlés, a felzárkóztatás, illetve a tehetséggondozás feladatszükségletét kívánja biztosítani, beleértve a tört együtthatójú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának gyakorlását is.

A törtek közös nevezőre hozása, illetve a nevezők legkisebb közös többszörösének meghatározása szükséges ahhoz, hogy tört együtthatójú egyenleteket meg tudjon oldani a tanuló. Tehát ezt a fejezetet csak akkor dolgoztathatjuk fel, ha a törtekkel végzett műveleteket jól begyakoroltattuk, ugyanakkor ezek a feladatok jól szolgálhatják a törtekről tanultak megszilárdítását.

A szöveges feladatok egyenlettel való megoldásához nélkülözhetetlen az **5.20.**-hoz hasonló feladatok megoldatása.

A műveletekkel kapcsolatos elnevezések tudatosításán túl a komponensek közötti kapcsolatok felírása matematikai modellel a szövegelelmző képességet is fejleszti.

A bővített változatban kidolgozott mintapéldák értelmezésének és a **B5.01–B5.23.** feladatok megoldásának az a feltétele, hogy a tanulók a racionális számok halmazán (pozitív és negatív törtekkel, tizedestörtekkel) biztosan el tudják végezni a műveleteket. A fejezet anyagának feldolgozásakor a következőkre helyezzük a hangsúlyt:

Gyakoroltassuk be a racionális számok minden tanult alakjával a négy alapműveletet.

Váljanak képessé a tanulók a változók közti kapcsolatok matematikai modellel való kifejezésére.

A tanulók változatos feladathelyzetekben tudatosítsák és gyakorolják be az egyenletmegoldás lépéseit.

Ezek a feladatok meghaladják a Kerettanterv minimumszintjét, ugyanakkor a következő évfolyamok anyagának előkészítése miatt minél alaposabban célszerű tárgyalni és gyakoroltatni ezt az anyagrészt. Ezért az osztály színvonalának megfelelően válogassunk közülük.

6. Összefoglaló

Év végén győződjünk meg arról, hogy minden tanuló elsajátította-e a tantervi minimumkövetelményekhez kapcsolódó ismereteket. Ezek begyakorlása nélkül bizonytalanná válhat a következő évi tanulás. A fogalmak, ismeretek felelevenítéséhez használtassuk a tankönyv végén lévő kislexikont. Év közben a legtöbb fogalom esetén megelégedtünk azzal, ha a tanuló konkrét esetekben értelmesen alkalmazni tudta azokat. *A jobbaktól esetleg most megkövetelhetjük ezeknek a fogalmaknak a pontos meghatározását is.*

Ám az év végi összefoglalásnak nem egyedüli feladata a hiányosságok pótlása. Az átlagos vagy annál jobb képességű osztályokban ennél tartalmasabb didaktikai feladatok megoldására is vállalkozhatunk:

- új szempontokkal bővíthetjük a korábbi vizsgálatokat;
- rendszerezhetjük az év közben összegyűjtött tapasztalatokat;
- a széttagoltan tárgyalt anyagrészek között tartalmi kapcsolatokat tárhatunk föl;
- magasabb absztrakciós szinten térhetünk vissza a korábban tanultakhoz;
- előkészíthetjük a következő évben tanulandókat.

Ha elegendő időt hagyunk az összefoglalásra, és ha nem vagyunk kényszerhelyzetben, akkor olyan érdekes anyagrészekkel (kombinatorikai problémákkal, érdekes szöveges feladatokkal, a gráfelmélet, a topológia körébe tartozó kérdések vizsgálatával stb.) is színezhetjük a tanórákat, amelyekkel a konkrét oktatási feladatok célratörő megoldása során esetleg keveset foglalkozhattunk (lásd a tankönyv *Érdekes feladatok* című részét).

Az év végi összefoglalás során fokozottan kell alkalmazkodnunk az osztály sajátosságaihoz és ezen belül az egyes tanulók adottságaihoz. Itt még kevésbé tudunk sémát, általánosan érvényes receptet nyújtani, mint az új anyagrészek feldolgozásához. Ezért a tankönyv összefoglaló fejezetét, az itt leírt javaslatokat csak a tényleges helyzet mérlegelésével alkalmazhatjuk.

Az év végi összefoglalóra 8–10 órát javaslunk.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Mit tanultunk a halmazokról?

Már a korábbi évfolyamokon is elvárjuk, hogy a tanulók tudják képezni konkrét halmaz adott tulajdonságú *részhalmazát,* a halmaz *kiegészítő halmazát* ismert alaphalmaz esetén, halmazok *közös részét* (metszetét), valamint *egyesítettjét* (unióját). Ismerjék a logikai „*és*”, valamint a logikai „*vagy*” jelentését. Ennek ellenére az általános iskolában legfeljebb 9. vagy 10. osztályban célszerű definiálnunk ezeket a fogalmakat. Elégedjünk meg azzal, hogy a tanuló konkrét feladatok megoldása során biztonsággal alkalmazza a halmazelméleti, logikai ismereteket a matematikai fogalmak közti kapcsolatok feltárására, megértésére, tudatosítására. Ugyanakkor gimnáziumi tagozatban, vagy jobb osztályokban az általános iskolákban is, lehetőségünk nyílik arra, hogy konkrét példákkal tudatosítsuk az elnevezéseket, és fokozatosan hozzászoktassuk tanulóinkat ezek

használatához, de ebben az életkorban semmiképp se erőltessük ezt. A halmazokkal 1-2 órában foglalkozzunk, de a további órákon is oldassunk meg ilyen feladatokat.

Számtan, algebra

Ha az **5.** fejezet feldolgozása közben átfogtuk a teljes számtan-algebra tananyagot, akkor most az összefoglalásra elegendő 4-5 órát szánnunk.

Elsősorban ehhez a részhez kapcsoljuk a relációkról, függvényekről, sorozatokról tanultak megerősítését is.

A következő tagolást javasoljuk:

1. *Osztók, többszörösök;* (törzsszám, összetett szám). Oszthatóság 2-vel, 5-tel, 10-zel; 4-gyel, 25-tel, 100-zal; (3-mal, 9-cel). Két oszthatósági szabály együttes alkalmazása, például a 10-zel való oszthatóság vizsgálata. (Számok törzstényezőkre bontása.) A szám osztóinak megkeresése, a legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.
2. *Racionális számok.* A racionális szám, egész szám, természetes szám fogalma. Racionális számok tizedestört alakja. (A törzstényezőkre bontás, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös alkalmazása törtek egyszerűsítésében, közös nevezőre hozásában.) Műveletek törtalakban és tizedestört alakban adott racionális számokkal. Műveleti sorrend, a zárójelek használata. A hatványozás.
3. *Egyenes és fordított arányossági következtetések.*
4. *Százalékszámítás.*
5. *Egyenletek, egyenlőtlenségek.* Az egyszerű szöveges egyenletek kapcsolódnak a matematika egyéb témaköreihez.

Mérés, geometria

A geometria összefoglalását a tankönyv a következőképp tagolja (ezt 3-4 órában dolgoztathatjuk fel):

1. *Mérés, mértékegységek.* Ha a tanulók többségének már nem jelent gondot a mértékegységek átváltása, akkor ezt a részt hozzákapcsolhatjuk például az arányos következtetések, illetve a kerület- és területszámítás gyakorlásához.
2. *Tengelyes szimmetria.* A tengelyes tükrözés végrehajtása, tengelyesen szimmetrikus háromszögek, négyszögek tulajdonságai, területük.
   Részletesen elemezzük legalább egy szerkesztési feladat megoldását.
3. *Síkidomok, sokszögek.* Háromszögek, sokszögek belső szögeinek összege.
4. *Testek vizsgálata; térelemek kölcsönös helyzete.* Téglatest testhálója, felszíne, térfogata. A vizsgálatokat a gyerekek kezébe adott testekkel végeztessük.