Dr. Czeglédy István főiskolai tanár
Dr. Czeglédy Istvánné vezetőtanár
Dr. Hajdu Sándor főiskolai docens
Novák Lászlóné tanár
Dr. Sümegi Lászlóné szaktanácsadó
Zankó Istvánné tanár

Matematika 8.

PROGRAM

általános iskola 8. osztály
nyolcosztályos gimnázium 4. osztály
hatosztályos gimnázium 2. osztály

Átdolgozott kiadás

MŰSZAKI KIADÓ, BUDAPEST

Alkotó szerkesztő:
DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az 1. kiadást bírálta:
ELŐD ISTVÁNNÉ ny. felelős szerkesztő
DR. MAROSVÁRI MIKLÓSNÉ vezetőtanár

© Dr. Czeglédy István, Dr. Czeglédy Istvánné, Dr. Hajdu Sándor,
Novák Lászlóné, Dr. Sümegi Lászlóné, Zankó Istvánné, 1996, 2008

© Műszaki Könyvkiadó Kft., 2008

ISBN 978-963-16-4330-5
Azonosító szám: MK–4330-5

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó Kft.
Felelős kiadó: Orgován Katalin ügyvezető igazgató
Szerkesztőségvezető: Hedvig Olga
Felelős szerkesztő: Bosznai Gábor
Borítóterv: Bogdán Hajnal
Műszaki szerkesztő: Trencséni Ágnes
Tördelőszerkesztés és számítógépes grafika: Köves Gabriella
Terjedelem: 8,22 (A/5) ív
4., 1. átdolgozott kiadás
Nyomta és kötötte a Borsodi Nyomda Kft.
Felelős vezető: Ducsai György ügyvezető igazgató

Tartalom

ÁLTALÁNOS MÓDSZERTANI JAVASLATOK

Alaptanterv – Kerettanterv – program – helyi tanterv

A tankönyv által képviselt oktatási-nevelési program a 202/2007. (VII. 13.) *Kormányrendelet mellékleteként kiadott Nemzeti alaptanterv* elveit követi. Felépítésében elsősorban a 17/2004. (V. 20.) OM rendelet mellékleteként **az Oktatási és Kulturális Miniszter által kiadott kerettanterv Nat-2007-nek megfelelő átdolgozott változatát** vettük figyelembe. Tankönyvcsaládunk ezeknek a dokumentumoknak egy lehetséges didaktikai kifejtése, kiteljesítése.

Érdemes idéznünk néhány sort a Nemzeti alaptanterv bevezető részéből:

„A Nemzeti alaptanterv fő funkciója a közoktatás tartalmának elvi, szemléleti megalapozása oly módon, hogy az iskolák önállóságát szem előtt tartva meghatározza a közoktatás országosan érvényes általános céljait, a közvetítendő műveltség fő területeit, a közoktatás tartalmi szakaszolását és az egyes tartalmi szakaszokban megvalósítandó fejlesztési feladatokat. A Nat az iskolában elsajátítandó műveltség alapjait határozza meg, megteremtve ezzel a közoktatás egységét.

A Nemzeti alaptantervben megfogalmazott elvek, célok, feladatok a helyi intézményi sajátosságokhoz, egyéni tanulási utakhoz alkalmazkodó, több változatban is kimunkált dokumentumokban öltenek testet.”

A fentiek alapján az alaptanterv célkitűzései nagyon sokféleképpen, az általunk kidolgozottól akár a tananyag tartalmában is eltérő programokkal valósíthatók meg. Ezért a szerzők által megfogalmazott programban leírtak csupán módszertani segédlet igényével felvázolt javaslatoknak tekinthetők.

A Nemzeti alaptanterv igen részletesen foglalkozik a matematikaórákon megvalósítandó **fejlesztési feladatokkal és kompetenciákkal**. Ezeket a fejlesztési feladatokat a kerettanterv első oszlopa rendeli hozzá az aktuális tananyaghoz. Ezzel kapcsolatosan a következőkre hívjuk fel a figyelmet:

A magyar fiatalok ötödének súlyos kommunikációs gondjaik vannak. Ezért minden tantárgy feladata a kommunikációs képességek fejlesztése: A tanuló váljon képessé *gondolatai nyelvileg és szakmailag szabatos kifejtésére, a hallott, illetve az olvasott szöveg helyes értelmezésére,* és törekedjen is erre.

A tanuló *törekedjen* új ismeretek *önálló* elsajátítására, személyiségének önálló fejlesztésére, gazdagítására. Alakuljon ki *az új információk értelmezésének, az új ismeretek elsajátításának* és *új készségek kialakításának képessége.* A motiváció, a magabiztosság, a figyelem összpontosítása, az akaraterő, a kitartó munka önálló megszervezésének képessége e kompetencia elengedhetetlen eleme. Ez a kompetencia fejleszthető a kidolgozott mintapéldák egyéni munkában történő feldolgoztatásával, a kislexikon használatának megtanulásával, olyan „projektekkel", amelyek önálló kutatómunkát igényelnek stb. A projekt olyan *tanulási egység*, amelynek a középpontjában egy probléma áll. A feladat nem egyszerűen a probléma megoldása, hanem a lehető legtöbb vonatkozásnak (történelmi előzményének, gyakorlati alkalmazhatóságának stb.) a feltárása.

Egyik legfontosabb kompetencia az a *képesség, hajlandóság* és *törekvés*, hogy a tanuló a személyes adottságait, tudását, készségeit, jártasságait *önállóan alkalmazza a mindennapi élet különböző szituációiban*, *szokatlan feladathelyzetekben* is. Ez feltételezi a problémameglátó és -megoldó képesség magas színvonalát, valamint az *új iránti nyitottságot* és *fogékonyságot*. Ez a kompetencia úgy fejleszthető, hogy bővítjük a tanultak alkalmazási területeit (hozzászoktatjuk a tanulókat a „szokatlan feladathelyzetekhez"). A korábbinál nagyobb hangsúlyt kell fektetnünk arra, hogy *az új ismeretekhez gyakorlati problémák felvetésével és megoldásával jussanak el tanulóink*. Felértékelődtek a mindennapi élethez szorosabban kapcsolódó anyagrészek (gyakorlati jellegű szöveges feladatok, mértékegységek alkalmazása, százalékszámítás, statisztika, valószínűség-számítás, grafikonok, táblázatok elemzése, a hasonlóság gyakorlati alkalmazásai stb.). A tankönyv átdolgozásánál különös gondot fordítottak a szerzők ezeknek a kérdéseknek a megoldására.

Magyarországon a matematikaórák döntő hányadában a tananyag-feldolgozás olyan *közös munkában* történik, amelyben a tanár *közvetlenül, kis lépésenként irányítja* a tanulók munkáját. Ez az *irányított felfedeztető,* úgynevezett *heurisztikus* munkaforma és módszer hatékony lehet, amikor egy fogalomrendszert tudatosítunk, felépítünk, illetve amikor a tanultakat rendszerezzük. Ugyanakkor hátránya, hogy nem fejleszti kellően azt a *kompetenciát, amely képessé teszi a tanulókat a munka önálló megszervezésére, a szükséges információk önálló felkutatására, az együttműködésre, mások véleményének meghallgatására, elfogadására.* Ezért a tanár irányításával folyó közös munka mellett föltétlenül javasoljuk az *egyéni*, a *páros*, illetve a *kiscsoportos* munkaformákat.

A *páros munka* a tanulás természetes formája. Lényeges vonása, hogy a tanulópárnak az a tagja, aki valamit nem ért meg, azonnal felteheti a kérdését, és meg is kapja rá a választ a társától. Ha mindketten elakadnak, akkor egyik szomszédos pártól kérhetnek segítséget, és csak végső esetben fordulhatnak a pedagógushoz. Ezeket a tanulópárokat olyan (esetleg csak a matematikaórán érvényes) ültetési renddel alakíthatjuk ki, ahol a páros egyik tagja matematikából viszonylag tehetséges, a másik viszont (matematikai képesség, szociális háttér vagy valamilyen sérültség miatt) hátrányos helyzetben van. Páros munka javasolt az előkészítő feladatsorok megoldásakor, mérések, kísérletek elvégzésben, a mintapéldák önálló tanulmányozása során, számolási, szerkesztési eljárások begyakorlásakor stb. A tanári utasítás ilyenkor: „Beszéljétek meg a munkát!"

Bizonyos pedagógiai helyzetekben a 4-5 fős *csoportos oktatási forma* lehet a leghatékonyabb. Legegyszerűbb formája, amikor két tanulópár közösen oldja meg a problémát.

Mindkét oktatási forma elősegítheti (a fent említetteken kívül) a következő kompetenciák kialakulását: *együttes munkavégzés képessége, felelősségérzet, segítőkészség, a másság elfogadása, a szegregáció elutasítása* stb.

A taneszközökről

Matematika 8. tankönyv

Alapszintű és bővített (emelt szintű) változatban jelenik meg. Az *emelt szintű, bővített* változat tartalmazza azokat a margón szürke sávval jelzett kiegészítő anyagrészeket, illetve összetettebb feladatokat is, amelyeket alapszinten már nem célszerű az egész csoportban feldolgoznunk. Természetesen a jobb képességű tanulók alapszinten is foglalkozhatnak ezekkel az anyagrészekkel, feladatokkal. Néhány témakörben az alapszintű tankönyvünk is bővebben és magasabb szinten tárgyalja a tananyagot, mint amit a Kerettanterv minimumszinten ajánl, hiszen a Kerettanterv csupán a tananyag közös magját tartalmazza, amelyet mindenki számára tanítanunk kell. Ez a „mag" alapszinten a tananyag mintegy 85%-a, emelt szinten 60–70%-a. Az osztály képességének és a matematikai tartalom egymásra épülésének figyelembevételével, a helyi tanterv alapján a szaktanár dönti el, hogy melyik tanulócsoportnak hogyan építi fel a tananyagot.

Itt jegyezzük meg, hogy a Kerettanterv által ajánlott tananyag sem a tantárgyak rendszerét tekintve, sem a matematikai tartalom felépítésében nem alkot didaktikailag és logikailag hézagmentes rendszert, a hiányosságokat (még minimumszinten is) pótolniuk kellett a tankönyv szerzőinek.

A tankönyv egyes alfejezetei a következő egységekből állnak (ezek sorrendje a didaktikai feladathoz igazodóan változó):

előkészítő, felelevenítő feladatsorok;

kidolgozott mintapéldák (sokszor a tételek és bizonyítások „kiváltására", más esetben a legfontosabb alkalmazások ismertetésére);

gyakorlófeladatok, a differenciált *folyamatos ismétlés* feladatigényét is figyelembe véve;

összefoglalás, amelyben a témakörhöz tartozó definíciókat, tételeket, elméleti ismereteket gyűjtöttük össze.

Természetesen a konkrét tanulócsoporthoz és saját didaktikai elképzeléseinkhez igazodva választhatunk, hogy mit és milyen sorrendben használunk fel az egyes alfejezetekből.

A tankönyv fejezeteinek felépítése az áttekinthetőséget is szolgálja. A tanórán például az ismereteket legtöbbször egyes feladatok megoldásához kapcsolódva célszerű feleleveníteni. Ha ily módon építenénk fel a könyvet, akkor nemcsak nagyon megkötnénk a kollégák kezét, hanem a gyermek számára is megnehezítenénk a tanulást.

A fejezetekhez egy-egy *tudáspróba* csatlakozik, amely minta lehet a tanár számára, s elsősorban a tanuló önértékeléséhez nyújt útmutatást. Változtatás nélküli megíratását nem javasoljuk már csak azért sem, mert a tanulók nagy része a (mások által adott) megoldások megtanulásával „készülne fel" a dolgozatra.

Az egyes témakörökhöz tartozó gyakorló- és fejtörő feladatok egy részét egyaránt feldolgoztathatjuk a témakör anyagának rendszerezésekor, a folyamatos ismétlés keretében, illetve az év végi összefoglalás során.

A tankönyv és a program szerkesztésekor egyaránt figyelembe vettük, hogy *a középiskolába készülő tanulók számára* nagyon sok iskolában *emelt szintű képzést* biztosítanak, vagyis külön csoportban tanítják a matematikát a jobbaknak, illetve a nehezebben tanulóknak. Erre a csoportbontásra egyrészt azért van szükség, hogy a középiskolába készülő tanulóink hasonló színvonalú képzést kapjanak, mint a párhuzamos középiskolai osztályokba járó tanulók, másrészt hogy a matematikából kevésbé tehetséges tanulóinknak is megtaníthassuk legalább a tantervben előírt minimumot.

A tankönyv egyes fejezeteit úgy szerkesztettük meg, hogy az alap- és az emelt szintű képzés igényeit egyaránt kielégítsék. A margón szürke sávval jelölt emelt szintű anyagrészek szervesen beépülnek a fejezet egészébe. A tipográfiai megoldás, a feladatok egységes rendszert követő számozása és az oldalszámozás lehetővé teszi, hogy akár egy osztályon belül párhuzamosan is használhassák a tanulók az alap- és az emelt szintű könyvet. Minden fejezetben vannak olyan anyagrészek, mintapéldák és feladatok, amelyeket vagy csak az egyik, vagy csak a másik csoportban célszerű feldolgoztatnunk. Az „alapszint”, illetve az „emelt szint” tananyaga nem értelmezhető egyértelműen és mereven. *A szaktanár joga és feladata a tananyag végső megválasztása*. Végső soron ő dönti el, hogy mit tanít és milyen mélységben. Ebben a döntésében elsősorban a csoport adottságait, a Nemzeti alaptantervet, a Kerettantervet és a helyi tanterv előírásait kell figyelembe vennie. Így már a különböző alapszinten tanuló osztályokban sem lesz ugyanaz a tananyag. Gyengébb csoportban, vagy ha nem biztosítunk heti 4 órát a matematikaoktatásra, akár a tankönyvi anyag 20–30%-át is el kell hagynunk, míg jobb képességű csoportban megközelíthetjük az emelt szintet. (A szelektálással, a bővítéssel, illetve az átrendezéssel kapcsolatos javaslatainkat a tananyag feldolgozásának tárgyalásakor fogalmazzuk meg.)

A tananyag feldolgozását taglaló fejezeteink tekintik át a követelményeket (esetenként a fejlett országok gyakorlatát, illetve oktatási hagyományainkat) is. Ezeket a javaslatokat vessük össze oktatási és nevelési célkitűzéseinkkel, nem utolsósorban a tanulók továbbtanulási szándékával és a középiskolák elvárásaival. Mindezeket figyelembe véve dolgozhatjuk ki *saját követelményrendszerünket*.

A tankönyv megszerkesztése során az „átlagos osztály” jellegzetességeit vettük figyelembe. Például a geometriai transzformációk és a függvények, sorozatok témakör azért került a könyv végére, mert ha az osztály adottságai vagy időhiány miatt nem jutunk el az alapos és teljes feldolgozásához, akkor is teljesíthetjük a minimális oktatási és nevelési célkitűzéseinket.

Matematika 8. Gyakorló

A tanultak felelevenítéséhez, begyakorlásához, a hiányok pótlásához, *az alapkészségek fejlesztéséhez*, így a biztos eszköztudás kialakításához tartalmaz feladatsorokat.

Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény

A jó képességű tanulóinkat szoktassuk hozzá a középiskola intenzívebb munkájához, keményebb követelményeihez. Ezzel a feladatgyűjteménnyel ezt a munkát (lényegében az emelt szintű képzést) kívánták segíteni a szerzők.

Matematika 8. tankönyv feladatainak megoldása

A tanulók önellenőrzését segítő kiadvány.

Felmérő feladatsorok, matematika 8. osztály
Felmérő feladatsorok és javítókulcsok, matematika 8. osztály

A Kerettantervben megfogalmazott követelményeket ezekkel a feladatsorokkal konkretizálják a szerzők. A felmérő feladatsorok elsődleges célja, hogy segítse a szakmai munkaközösségeket a viszonylag egységes követelményrendszer kidolgozásában.

A *tanulói példányok* **A** és **B** változatban tartalmazzák a feladatsorokat. A szerzők mindkét változatban külön feladatokat dolgoztak ki az *alapszint* és az *emelt szint* számára.

A *tanári példányokban* a feladatsorok mellett megtalálhatók a javítási útmutatók és az értékelési normák is.

Olcsóbb kivitelben (négy füzetben) jelent meg az alapszintű **C** és **D**, illetve az emelt szintű **E** és **F** változat, valamint külön füzetben a hozzájuk tartozó javítási és értékelési útmutató. Ezeket a füzeteket csak az iskolák rendelhetik meg, a kereskedelmi forgalomban a tanulók nem férhetnek hozzájuk.

A *differenciálás* szükségességére és lehetőségeire külön felhívjuk a figyelmet. Differenciálhatunk:

- a tananyag tartalmában (lásd például a kiegészítő anyagrészeket);
- a tananyag-feldolgozás mélységében, a feladatok összetettségében;
- az alkalmazott munkaformában, módszerekben;
- a követelmények terén és az ellenőrzésben, értékelésben.

A különböző színvonalon álló tanulócsoportok teljesítménye annyira eltérhet egymástól, hogy a feladatok feldolgoztatásának módjához (egyéni munka, csoportmunka) már csak kivételesen adhatunk általánosan érvényes javaslatokat. A *munkaformák*, *módszerek* helyes megválasztása a tanár egyéniségétől, az egyes tanulók képességétől, illetve a tanulócsoport színvonalától és beállítódásától is függ. Ha kevésbé vagyunk képesek a fokozott figyelemmegosztásra, akkor jól gondoljuk meg, hogy az adott anyagrész feldolgozásánál célszerű-e például a csoportmunkát választanunk. Azoknak a tanulóknak, akik nem boldogulnak egyedül a munkával, hatékonyabb lehet a tanár-diák dialógus, a rávezetés, mint a könyvből való önálló tanulás.

Az *ellenőrzésnél* és az *értékelésnél* (a különböző felmérő feladatsorok megválasztásán kívül) például úgy is differenciálhatunk, hogy a jó képességű tanulóknak megadjuk az eredményt és a pontozási útmutatót, a többit rájuk bízzuk (tehát csak irányítjuk önellenőrző, önértékelő tevékenységüket). A gyengébb tanulókkal végighaladunk a megoldás menetén, felhívjuk a figyelmüket a típushibákra, megmutatjuk ezek kiküszöbölésének lehetőségeit. Vagyis ezek a tanulók az ellenőrzés, értékelés közben is tanulnak, újabb ismeretek, kapcsolatok birtokába jutnak.

A tananyag feldolgozása során és a módszerek megválasztásakor vegyük figyelembe, hogy az ismeretszerzés eddigi fázisaira az *indukció* volt a jellemző, amelyben konkrét jelenségek megfigyeléséből jutottak el a gyerekek általánosabb összefüggések felismeréséhez. A 8. osztályban (legalábbis az emelt szintű képzés keretében és a fokozatosság elvét szem előtt tartva) esetenként választhatjuk a deduktív utat is, vagyis a fogalom *definiálása*, a *tételek kimondása és bizonyítása* után kerül sor az *alkalmazásra*. Ugyanis a 13-14 éves gyerek – életkori sajátságait tekintve – már alkalmas a *deduktív következtetésekre*. Megjegyezzük, hogy a dedukció akkor lehet igazán eredményes, ha korábban elegendő szemléleti, tapasztalati anyagot halmozott fel a tanuló.

A tanulók megfelelő mennyiségű alapismerettel rendelkeznek, s értelmi szintjük is lehetővé teszi e gondolkodási műveletek végzését. Elsőrendű feladatunk az *absztrahálás* (elvonatkoztatás), az *általánosítás* és az *analógia* fejlesztése, bár a többi gondolkodási művelet (a specializálás, az analízis, a szintézis, a konkretizálás, a rendezés, a rendszerezés stb.) fejlesztését sem hanyagolhatjuk el.

Az *absztrahálás* a fogalomalkotásban nélkülözhetetlen. Elvárhatjuk a tanulótól, hogy a vizsgált objektumra, fogalomra jellemző lényeges jegyeket emelje ki, tekintsen el a lényegtelen – a fogalomra nem jellemző – sajátosságoktól.

Általánosítással a számstruktúrák bővítésekor, a geometriai fogalomrendszerek felépítése során, a lineáris függvény értelmezésekor stb. találkozik a tanuló. Esetleg az oszthatósági szabályok, egyes geometriai tételek általános bizonyítását is megkövetelhetjük (a középiskolába készülőktől, illetve a középiskolai tagozatra járóktól).

Különböző *szöveges feladatok* megoldása, illetve a megoldás diszkussziója is általánosítást igényel, erre például a következő kérdésekkel vezethetjük rá a tanulót:

Mit mondhatunk még el a feladatról?

Milyen egyéb kapcsolatokat találunk az adatok között?

Hogyan változik a megoldás, ha változtatjuk az adatok méreteit, mérőszámait?

Az *analógia* is nélkülözhetetlen a fogalomalkotáshoz (például a sík- és térbeli alakzatok hasonlatosságának vizsgálatában), de a feladatok megoldásában is. Ezért javasoljuk, hogy ha a tanulónak nem sikerül egy feladatot megoldania, tegyünk fel a következőkhöz hasonló kérdéseket (szoktassuk rá a tanulókat is a kérdésfeltevésre):

Találkoztunk-e már hasonló feladattal?

Előfordultak-e abban is ilyen adatok?

Milyen kapcsolatot találtunk abban a feladatban az adatok között?

ÓRATERV, TANMENET

Óraterv

A matematika heti óraszámát az iskolák a helyi tantervükben rögzítik. Az egyes tantárgyakra jutó óraszámot az oktatási törvény és a NAT nem írja elő kötelező jelleggel. A Kerettanterv *minimális óraszámként* heti 3, évi 111 matematikaórát ír elő. Ettől az óraszámtól az iskola helyi tanterve csak „felfelé” térhet el.

A fentiek alapján az iskolák egy részében a 8. osztályban is heti 3, évi 111 matematikaóra van. A számukra javasolt óraszámokat (az óratervben és a tanmenetben is) üres keretbe írtuk. Például: $\boxed{\text{1–28. óra}}$. Megjegyezzük, hogy ez az órakeret csak a **redukált tananyag**, vagyis a **kerettantervi minimumot tartalmazó alapszintű tankönyv feldolgozására elegendő**. Csak az lehet a célunk, hogy a továbblépéshez nélkülözhetetlen ismereteket, műveleti eljárásokat begyakoroltassuk, és a **kompetenciaalapú oktatástól** elvárt **alapkészségeket** kialakítsuk.

A matematika tanítására szánt órakeret kialakításakor fontoljuk meg a következőket:

A matematikai alapozást igénylő társtantárgyak (matematika, fizika, kémia) a felső tagozaton és később a középiskolákban feltételeznek olyan biztos matematikai ismereteket és készségeket, amelyek csak heti 4 órában alakíthatók ki.

Ennek a korosztálynak az elmúlt 140 évben Magyarországon és Európa fejlett országaiban általában heti 4, esetleg 5 matematikaórát biztosítottak és biztosítanak. Ez 1985-ig nálunk évi 132, illetve 165 matematikaórát jelentett, ami az ötnapos tanítási hét bevezetése után heti 4, évi 148 matematikaórára módosult.

Tanulóink csak biztos, alkalmazásra képes matematikai ismeretek és képességek birtokában szerepelhetnek sikeresen a **középiskolai felvételi vizsgákon.** Heti 3 órában nem készülhetnek fel kellően ezekre a vizsgákra.

A tanév végén esedékes **országos kompetenciamérések feladatsorai „kiszélesítették” a matematikatanítással kapcsolatos követelményrendszert,** ha tartalmilag nem is bővítették azt. Jól begyakorolt, szokatlan feladathelyzetekben, gyakorlati problémák megoldására is alkalmazható ismereteket és készségeket várnak el a tanulóktól. Ezeknek a követelményeknek sem tudunk eleget tenni heti 3 órában.

Megjegyzés: A felvételi vizsgákra és a kompetenciamérésre felkészítő feladatokra a tanmenetben külön felhívjuk a figyelmet.

Az iskolák többségében (különböző lehetőségeket kiaknázva) a minimálisan előírt 3 órát legalább 1 órával kiegészítik. Ezekben az iskolákban javasoljuk **a tankönyv bővített változatának** feldolgozását. Ugyanis a tankönyv bővített változatának összeállításakor 180 napos tanítási évet és évi 144 matematikaórát vettünk figyelembe. Az ilyen helyi tanterv alapján dolgozó osztályok számára javasolt óraszámokat szürkére színezett keretbe írtuk: **1 – 38. óra**

1. Gondolkozz és számolj! 1 – 28. óra **1 – 38. óra**

Alapszinten a halmazelméleti ismeretek összefoglalása, rendszerezése, tudatosítása.

Jobb képességű csoportokban bevezethetjük a halmazelméletben alkalmazott jelöléseket. Esetleg *tehetséges tanulóink* egyéni munkában dolgozzák fel ezt az anyagrészt.

A természetes számokról tanultak felelevenítése – A zsebszámológép használatával kapcsolatos ismeretek rendszerezése, tudatosítása – Racionális számok nemnegatív egész kitevőjű hatványai, a hatványozás tulajdonságainak vizsgálata konkrét számfeladatokban – A számok négyzete – Egynél nagyobb szám normálalakja; *jobb képességű csoportban:* Tetszőleges pozitív szám normálalakja – Osztó, többszörös, oszthatósági szabályok; törzsszámok, összetett számok, pozitív egész számok törzstényezőkre bontása; legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös – Az egész számokról, a törtekről és a tizedestörtekről tanultak ismétlése – Műveletek gyakorlása a racionális számok halmazában; műveleti sorrend, zárójelek alkalmazása – A racionális számok fogalma, tizedestört alakja – A számok négyzetgyöke

Szöveges feladatok megoldása; a számokról, műveletekről, illetve a mérésekről, a terület- és a térfogatszámításról korábban tanultak alkalmazása gyakorlati jellegű feladatokban. Fektessünk hangsúlyt a zsebszámológép alkalmazásának gyakoroltatására.

A négyzetre emelést és a négyzetgyökvonást a következő fejezetben, a geometriai számítások során gyakoroltathatjuk be.

Gyakorlás – **1. felmérés**

A halmazelméleti és aritmetikai ismeretek, készségek, a logikus gondolkozás, a szövegértelmező képesség, valamint a tanultak gyakorlati alkalmazásának felmérése – A hiányok pótlásának megszervezése.

Arány, arányossági következtetések, arányos osztás; százalékszámítás, kamatos kamat – Egyszerű kombinatorikus feladatok – Valószínűségi kísérletek és számítások – Statisztikai számítások; grafikonok, diagramok értelmezése, készítése

Fontosak az olyan „új típusú” szöveges feladatok, amelyek táblázatok, diagramok értelmezéséhez, elemzéséhez kapcsolódnak. Ezekkel a tanév végén esedékes országos kompetenciamérésre készítjük fel a tanulókat.

Gyakorlás – **2. felmérés**

Arányossági következtetések; kombinatorikus számítási eljárások, valószínűség-számítási, és statisztikai feladatok megoldása; a logikus gondolkozás, a szövegértelmező képesség, valamint a tanultak gyakorlati alkalmazásának felmérése – A hiányok pótlása.

2. Síkidomok, felületek, testek

29–53. óra | **39–74. óra**

A korábban tanult geometriai fogalmak felelevenítése, rendszerezése, kiegészítése: Térelemek kölcsönös helyzete, távolsága; szögek értelmezése síkban és térben; az elfordulás jellemzése irányított szöggel; szögpárok – Adott tulajdonságú ponthalmazok; kör, szakasz felezőmerőlegese, konvex szög szögfelezője – Síkidomok, sokszögek; konvex és konkáv alakzatok – A háromszögekről tanultak felelevenítése, kiegészítése, rendszerezése; a háromszögek szerkesztésének alapesetei, háromszögek szerkesztése – A háromszög nevezetes vonalai, pontjai – Pitagorasz tétele

Kiegészítő tananyag: egymással derékszöget bezáró vektorok eredője

A fizikában tanult egyes fogalmak (erő, elmozdulás, sebesség) értelmezéséhez szükséges a vektor fogalma, ezért fontos, hogy a matematikában is foglalkozzunk ezzel a fogalommal. A vektor fogalma a matematikaórán is jól alkalmazható egyes (elmozdulásokkal kapcsolatos) gyakorlati, illetve a térszemléletet fejlesztő problémák megoldásában.

A négyszögekről tanultak kiegészítése, rendszerezése; a trapéz, a paralelogramma és a deltoid tulajdonságai – A sokszögek területe, a terület mértékegységei, a téglalap, paralelogramma, deltoid, trapéz, háromszög területe – A körrel kapcsolatos fogalomrendszer felelevenítése, rendszerezése; a kör kerülete, a kör (körgyűrű, körcikk) területe – Sokszöglapokkal határolt testek – A hasáb származtatása, tulajdonságai, hálója, felszíne – Térfogatmérés, az egyenes hasáb térfogata – Az egyenes körhenger származtatása, tulajdonságai, felszíne, térfogata – Ismerkedés a gúlával; a gúla származtatása, hálója, felszíne

Fontos feladat a Pitagorasz-tétel, illetve a terület-, a felszín és a térfogatszámításról tanultak gyakorlati alkalmazása. A „tétel” és a „bizonyítás” fogalma. A bizonyítási igény felkeltése. Annak felismertetése, hogy mérés helyett az összefüggések alkalmazásával, számítással határozzuk meg a síkidomok és a testek hiányzó adatait.

További fontos feladat a képi gondolkodás és a térszemlélet fejlesztése. Ezért föltétlenül adjuk a tanulók kezébe a téglatest, kocka élvázmodelljét, készítsék el és vizsgálják különböző hasábok és gúlák hálóját. Modell segítségével szemléltessük a henger palástjának „kiteríthetőségét”. Építtessünk például játékkockákból alakzatokat, rajzoltassuk meg nézeti képeiket.

Az ilyen jellegű feladatokkal az év végi kompetenciamérésre is felkészítjük a tanulókat.

Gyakorlás – **3. felmérés,** az első félév lezárása

Mértékegységek átváltása; háromszögek szerkesztése; a Pitagorasz-tételről, valamint a terület-, kerület-, felszín- és térfogatszámításról tanultak alkalmazása (gyakorlati jellegű feladatokban is). A képi gondolkodás és a térszemlélet színvonalának, valamint a tanultak gyakorlati alkalmazásának felmérése – A hiányok pótlásának megszervezése.

A számításos feladatokkal vizsgálhatjuk az aritmetikai készségek és képességek, illetve a szövegértelmező képesség szintjét is, így ez a dolgozat alkalmas lehet az első félévben tanult anyagrészek nagy részének felmérésére.

Emelt szinten, kiegészítő anyag: A gúla térfogata – A kúp származtatása, az egyenes körkúp felszíne, térfogata – A gömb származtatása, főkörei; felszíne térfogata

A gúlával, a kúppal és a gömbbel kapcsolatosan ne adjunk feladatokat a 3. felmérésben, hiszen ezeket az anyagrészeket ismerkedés szintjén célszerű feldolgoztatnunk.

3. Algebra

54–71. óra | **75–97. óra**

Az algebrai kifejezés, az együttható, a változó fogalma – Algebrai kifejezések helyettesítési értékeinek meghatározása – Egynemű és különnemű algebrai kifejezések – Egynemű algebrai kifejezések összevonása – Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel – Többtagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel – Többtagú kifejezés szorzattá alakítása kiemeléssel

Kiegészítő anyag: Nevezetes azonosságok

Fontos a műveleti tulajdonságokról korábban tanultak felidézése, tudatosítása. Az algebrai kifejezésekről tanultakat úgy gyakoroltassuk be, hogy az egyenletek, egyenlőtlenségek átalakítása, a megoldásuk ellenőrzése, a szöveges feladatban adott összefüggések matematikai modelljének felírása, illetve a geometriában (és a fizikában) tanult képletek alkalmazása ne jelentsen gondot.

Egyenlet egyenlőtlenség, azonosság, azonos egyenlőtlenség, alaphalmaz, megoldáshalmaz stb. fogalma – Az egyenletek megoldása a két oldal egyenlő változtatásával (a mérlegelv) – Az egyenlőtlenségek megoldása a két oldal egyenlő változtatásával – Törtegyütthatós egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása – Szöveges feladatok megoldása egyenlettel, egyenlőtlenséggel

Kiegészítő anyag: A helyiértékes írásmóddal kapcsolatos feladatok – Geometriai számításokkal kapcsolatos feladatok – Fizikai számításokkal kapcsolatos feladatok – Keveréses feladatok – Együttes munkavégzéssel kapcsolatos feladatok

Gyakorlás – **4. felmérés**

Algebrai kifejezések fogalma, helyettesítési értékének meghatározása – Algebrai kifejezések összevonása, szorzása számmal, szorzattá alakítása kiemeléssel – Lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek algebrai megoldása – Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok – A hiányok pótlásának megszervezése.

4. Geometriai transzformációk

72–91. óra | **98–121. óra**

A korábban tanultak felelevenítése, rendszerezése: a geometriai transzformáció fogalma, geometriai transzformációk vizsgálata játékos feladatokban; az egybevágóság értelmezése, a különböző egybevágósági transzformációk fogalmának szemléleti megalapozása – A háromszög egybevágóságának alapesetei; háromszögek szerkesztése

A kompetenciamérésekben sok olyan feladattal találkozunk, amelyek megoldására „geometriai játékokkal” (tükrökkel, pausz papírral végzett megfigyelésekkel, parkettázással, síkidomok hajtogatásával stb.) készíthetjük fel a tanulóinkat.

A tengelyes tükrözés fogalma, tulajdonságai (ismétlés), sokszög tengelyes tükörképének megszerkesztése; tengelyesen szimmetrikus alakzatok – A középpontos tükrözés fogalma, tulajdonságai, sokszög középpontos tükörképének megszerkesztése, középpontosan szimmetrikus alakzatok – Az elmozdulás megadása irányított szakasszal, a vektor fogalma – Az eltolás fogalma, tulajdonságai, sokszög eltolással kapott képének megszerkesztése Az elforgatás fogalma, tulajdonságai

Kiegészítő anyag: Az elfordulás jellemzése irányított szöggel; sokszög elforgatással kapott képének megszerkesztése, forgásszimmetrikus alakzatok

A hasonlóság fogalma; a hasonlóság alkalmazása a mindennapi gyakorlatban (alakzatok kicsinyítése, nagyítása)

Kiegészítő anyag: A háromszögek hasonlóságának alapesetei – Szakasz felosztása – Hasonló síkidomok területének aránya – Hasonló testek térfogatának aránya

Megjegyzés: A különböző felmérésekben, sok feladatban a hasonló síkidomok területének arányát kell meghatározniuk a tanulóknak.

Középpontos hasonlóság fogalma, tulajdonságai, alkalmazása szerkesztésekben, gyakorlati jellegű feladatokban.

Gyakorlás – **5. dolgozat**

Egybevágósági transzformációk fogalma, felismerése, végrehajtása. tengelyesen, illetve középpontosan szimmetrikus alakzatok – Háromszögek, négyszögek szerkesztése – A hasonlóság fogalma, tulajdonságai, hasonlóság alkalmazása gyakorlati jellegű számításokban – A középpontos hasonlóság fogalma, tulajdonságai, középpontosan hasonló kép megrajzolása, megszerkesztése – A hiányok pótlásának megszervezése.

5. Relációk, függvények, sorozatok — 92–107. óra — 122–140. óra

A reláció, a hozzárendelés fogalma, hozzárendelések tulajdonságainak vizsgálata konkrét feladatokban – A függvény fogalma, a függvény értelmezési tartománya, értékkészlete; a függvények grafikonja; a függvénytulajdonságok vizsgálata a függvény grafikonjának elemzése alapján – Az egyenes arányosság mint függvény – A lineáris függvény értelmezése, a lineáris függvény grafikonjának vizsgálata, a grafikon ábrázolása; speciális lineáris függvények: az elsőfokú függvény, az egyenes arányosság, illetve a konstans függvény – Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal; hőmérséklet-változás, mozgásgrafikonok – A sorozat mint függvény, sorozathoz szabály keresése, sorozat tetszőleges tagjának kiszámítása adott szabály alapján; számtani, illetve mértani sorozatok – Néhány nemlineáris függvény: az abszolútérték-függvény, az $f(x) = x^2$ függvény, a négyzetgyök függvény és a fordított arányosság – Egyenletek. egyenlőtlenségek grafikus megoldása

A függvényekről, sorozatokról tanultak alkalmazása gyakorlati jellegű, „újszerű” feladatokban. A 8. osztályos kompetenciamérésre készítjük fel a tanulókat, ha az arány, arányos osztás fogalmát térképek, nézeti rajzok értelmezésére, műszerek adatainak leolvasására stb. alkalmazzuk. A mindennapi jelenségek, történések vizsgálata grafikon segítségével ugyancsak a kompetenciamérés szempontjából lehet fontos.

Gyakorlás – **6. dolgozat**

Szöveggel, táblázattal, grafikonnal adott összefüggések értelmezése, tulajdonságainak vizsgálata – A lineáris függvény értelmezése, grafikonjának megrajzolása – Néhány egyszerű nemlineáris függvény megrajzolása – Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása – Sorozatok vizsgálata, néhány elemével adott sorozathoz szabály keresése, felismert vagy adott szabály alapján a sorozat elemeinek megadása.

6. Tartalék órakeret — 108–111. óra — 141–144. óra

A központi felmérések előkészítésére és megíratására tartalékolt órakeret.

Tanmenet

Az alábbiakban található tanmenetjavaslatban csak áttekintést nyújtunk a felhasználható feladatokról. Javasoljuk a konkrét osztály szintjének, saját koncepciónknak és a helyi tanterv ajánlásainak megfelelő feladatok sorszámának beírását a tanmenetbe.

Célszerű külön-külön számon tartani azokat a feladatokat, amelyek

a minimumkövetelményekhez kapcsolódnak;

a tehetséges tanulóink fejlesztését szolgálhatják;

az elképzeléseinknek megfelelő koncentrációt valósítják meg;

más fejezet tananyagához tartoznak, de a folyamatos ismétlés keretében itt foglalkozunk velük.

A tanmenetjavaslatban a tankönyv feladatainak sorszáma előtt feltüntetjük a fejezetek sorszámát is. Például a Tk/1. 22–25., B6–B9. az első fejezet feladatait jelöli. A kompetenciamérésre, illetve a felvételi vizsgára való felkészítés szempontjából fontos feladatok sorszámát a következőképpen külön kiemeljük: **Tk/1. 38.**

1. Gondolkozz és számolj!

1–2. óra **1–2. óra** **Mit tanultunk a halmazokról?**

Halmazelméleti alapismeretek áttekintése konkrét példák alapján.

Jobb képességű csoportban, illetve *középiskolai felvételire készülő tanulóink számára* általánosan is értelmezhetjük a következő fogalmakat: halmaz, elem, eleme mint nem definiált alapfogalmak; üres halmaz, halmaz részhalmaza, halmazok kiegészítő halmaza, közös része (metszete), egyesítettje (uniója), különbsége. Bevezethetjük a fenti fogalmakkal kapcsolatos jelöléseket.

Osztó, többszörös, oszthatósági szabályok.

Matematikai logika: legalább, legfeljebb, pontosan; és, (megengedő) vagy stb.

Logikai feladatok.

Tk/1. 1–5., B1–B5., **Tk/1. 5., B5.**;
Mgy. 1.01–1.08., 1.13–1.15., 1.21–1.27.; 1.09–1.12., 1.16–1.20.; Fgy. 1.1.01–20.

3. óra **3. óra** **Természetes számok**

A *természetes szám fogalma, műveleti tulajdonságok*. Helyiértékek rendszere a tízes számrendszerben: alakiérték, tényleges érték.

Írásbeli műveletek gyakorlása. Szöveges feladatok.

Tk/1. 6., **Tk/1. 7.**; Mgy. 2.01–2.15.; Fgy. 2.1.01–13., 2.2.08–12.

4. óra | 4–5. óra | **Használd a zsebszámológépet!**

A zsebszámológép használatával kapcsolatos ismeretek és tapasztalatok tudatosítása.

A *redukált programban* az egyszerű és az összetett számfeladatok gyakorlására helyezzük a hangsúlyt.

Műveleti sorrend, zárójelek használata.

A zsebszámológép használatát a tankönyv további fejezeteinek feldolgozásánál gyakoroltatjuk be.

Tk/1. 8–9., **Tk/1. 10.**; Mgy. 2.16–2.17.

5–6. óra | 6–7. óra | **Hatványozás**

A *hatványozás értelmezése* (ismétlés), hatványok kiszámítása zsebszámológéppel.

Számolás hatványokkal: azonos alapú hatványok szorzása, osztása, szorzat, hányados hatványozása konkrét számfeladatokban.

A *számok négyzetének* fogalma, meghatározása zsebszámológéppel.

Jobb képességű csoportban bizonyíthatjuk a hatványokkal végzett műveletek szabályait.

Műveleti tulajdonságok. Műveleti sorrend. A zsebszámológép használata.

Tk/1. 11–21.; Mgy. 2.18–2.30.; Fgy. 2.3.01–12.

7–8. óra | 8–10. óra | **A számok normálalakja**

Alapszinten: A helyiértékek felírása 10 hatványainak segítségével. Az 1-nél nagyobb *számok normálalakja.*

Jobb képességű csoportban: Számolás normálalakban adott számokkal. A 10 *negatív egész kitevőjű hatványainak értelmezése.* 0-nál nagyobb számok normálalakja.

Hatványozás. Számolás zsebszámológéppel.

Az SI mértékegységek előtagjainak rendszere (Tk. 6. oldal) Mértékegységek átváltása. Kapcsolat a fizika, illetve kémia tantárgyakkal.

Tk/1. 22–23., **Tk/1. 24., 25.**, B6–B9.; Mgy. 2.31–2.41., 2.47–2.51., 7.04., 7.06–7.10.; Fgy. 2.3.15–19., 2.3.23–31., 2.3.33–35.

9–10. óra | 11–12. óra | **Osztó, többszörös**

A korábban tanultak áttekintése: Osztó, többszörös, törzsszám (prímszám), összetett szám, a számelmélet alaptétele, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, oszthatósági szabályok.

Hatványozás, műveletek hatványokkal. Halmazok. Kombinatorika.

Területszámítás, térfogatszámítás. A zsebszámológép használatának gyakorlása.

Tk/1. 26–38., **Tk/1. 34., 35., 38.**; Mgy. 2.52–2.70.; Fgy. 2.6.01–23., 6.1.12.

11–12. óra | 13–14. óra | **Egész számok**

A korábban tanultak áttekintése: A természetes számkör bővítése, ellentett, abszolútérték, műveletek egész számokkal. A negatív számok hatványozása.

Műveleti tulajdonságok. Hatványozás.

A zsebszámológép alkalmazása negatív számokkal történő számításokban.

Tk/1. 39–51., **Tk/1. 42.**; Mgy. 2.71–2.75.

13–15. óra | 15–17. óra | **Racionális és irracionális számok**

A korábban tanultak áttekintése: Törtek értelmezése, műveletek törtekkel, egyszerűsítés, bővítés, törtrész, egészrész kiszámítása.

A racionális számok értelmezése, tizedestört alakja. Irracionális számok mint végtelen nem szakaszos tizedestörtek.

Jobb képességű csoportban: Véges vagy végtelen szakaszos tizedestörtek törtalakja.

Műveleti tulajdonságok. Hatványozás. A zsebszámológép alkalmazása.

Tk/1. 52–70., B10–B14., **Tk/1. 55., 56., 69.**;
Mgy. 2.76–2.90., 2.93–2.100., 2.117–2.121., 7.01–7.03.;
Fgy. 2.1.14–19., 2.2.13–27., 2.8.07–10.

16. óra | 18–19. óra | **A számok négyzetgyöke**

Nem negatív számok *négyzetgyökének* értelmezése, kiszámítása zsebszámológéppel.

A számok négyzete. A zsebszámológép alkalmazása.

Megjegyzés: A négyzetre emelést és a négyzetgyökvonást a Pitagorasz-tétel alkalmazása során gyakoroltathatjuk.

Tk/1. 1.71–78.; Mgy. 2.122–2.126.; Fgy. 2.3.37.

17. óra | 20–21. óra | **Az 1. felmérés megíratása**

Az alapvető halmazelméleti és aritmetikai ismeretek, készségek, továbbá a logikus gondolkozás, illetve szövegértelmező képesség szintjének felmérése (gyakorlati jellegű feladatokkal).

A hiányok pótlásának megszervezése.

18–19. óra | 22–24. óra | **Arány, arányosság, százalékszámítás**

A korábban tanultak áttekintése, gyakorlása, elmélyítése: Arány. Arányos osztás. Egyenes és fordított arányossági következtetések, aránypár.

Százalékszámítás. Alap, százalékérték, százalékláb fogalma. Összetett százalékszámítási feladatok. Kamatoskamat-számítás.

Gyakorlati jellegű szöveges feladatok (együttes munkavégzés, üzemanyag-fogyasztás, ételreceptek, pénzhasználat, árváltozások, valuták átváltása) megoldása.

Megjegyzés: Az arányos osztást, a törtrész meghatározását, illetve a százalékszámítást majd a valószínűségi és a statisztikai feladatok megoldása során újszerű feladathelyzetekben gyakoroltathatjuk.

Műveletek racionális számokkal, a számológép használata. Törtrész, egészrész kiszámítása.

Geometriai számítások: terület- és kerületszámítás.

Tk/1. 79., **Tk/1. 80–83.**, Tk/1. 84., **Tk/1. 85–89.**;
Mgy. 2.101–2.116., 2.93–2.100.; Fgy. 2.4.01–19., 2.5.01–30.

20–21. óra | 25–27. óra | **Hányféleképpen?**

A *sorba rendezés* mint *kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés*. Konkrét feladatokban néhány elem sorba rendezésének (permutációinak) száma, ha az elemek mind különbözők, illetve ha az elemek között vannak azonosak.

Adott elemek közül valahány *kiválasztása és sorba rendezése* (variációk). Konkrét feladatokban a variációk száma, ha az elemek mind különbözők, illetve ha az elemek ismétlődhetnek.

Adott elemek közül valahány *kiválasztása, ha a sorrend nem számít* (kombinációk). Konkrét feladatokban a kombinációk száma, ha az elemek mind különbözők.

Fagráfok. Hozzárendelés, függvény. Számok írása a tízes számrendszerben. Hatványozás.

Véges halmazok részhalmazai.

Tk/1. 90–93., **Tk/1. 94–105.**; Mgy. 9.01–9.20.; Fgy. 5.1.01–42.

22–23. óra | 28–30. óra | **Valószínűségi kísérletek és számítások**

Valószínűségi játékok, kísérletek. *A gyakoriság, a relatív gyakoriság, az elemi esemény, a lehetetlen esemény, a biztos esemény* fogalma. A nagy számok törvényének és a *valószínűség* fogalmának megsejtése. A kedvező esetek, illetve az összes lehetséges eset számának meghatározása kombinatorikus valószínűség-számítási feladatokban.

Állítások igazságának eldöntése.

Kombinatorikai ismeretek és számítási eljárások.

Arány, hányados, törtrész kiszámítása, százalékszámítás gyakorlati alkalmazása.

Tk/1. 106–109., **Tk/1. 110–113.**; Mgy. 9.31–9.38.; Fgy. 5.2.11–22.

24–25. óra | 31–33. óra | **Statisztikai számítások**

Adatok gyűjtése, rögzítése, rendszerezése, elemzése. Eloszlások, átlag, az adatok szóródásának jellemzése az átlagtól való átlagos eltéréssel. Táblázatok. oszlopdiagram, töröttvonal-diagram, szalagdiagram, kördiagram.

Jobb képességű csoportban: Statisztikai adatok és vizsgálatok gyűjtése egyéni munkában. Két változó véletlen kapcsolata.

Műveletek a racionális számkörben.

A zsebszámológép alkalmazása.

Arányos osztás. Százalékszámítás. A lineáris korreláció fogalmának előkészítése.

Tk/1. 114–115., **Tk/1. 116–118.**; Mgy. 9.21–9.30.

26–27. óra | 34–36. óra | **Gyakorlás**

Alapszinten: A 2. felmérés, illetve az év végi kompetenciamérés előkészítése.

Jobb képességű csoportban: Felkészítés a középiskolai felvételi vizsgákra.

Tk/1. 119., 122., 123., **Tk/1. 120–121., 124.**, **Tk/1. B15–B35.**

28. óra | 37–38. óra | **A 2. felmérés megíratása**

Arány, egyenes és fordított arányosság, arányos osztás, százalékszámítás. Statisztikai számítások. Egyszerű kombinatorikai és valószínűség-számítási feladatok.

A tanultak alkalmazása gyakorlati jellegű feladatokban; a logikus gondolkozás, a szövegértelmező képesség szintjének felmérése.

A hiányok pótlásának megszervezése.

2. Síkidomok, felületek, testek

29–30. óra | 39–40. óra | **Térelemek**

Sík- és térgeometriai alapismeretek, alapvető szerkesztési eljárások ismétlése, rendszerezése, gyakorlása:

Térelemek kölcsönös helyzete, távolsága.

Szögek értelmezése síkban és térben; szögfajták, szögpárok; irányított szög.

Redukált programban: A továbblépéshez nélkülözhetetlen ismeretek felelevenítése.

Emelt szinten: „Alapfogalom”, „alaptétel”, „definíció”, „tétel”, „bizonyítás.”

Sorozatok, függvények.

Nevezetes szögek szerkesztése.

Tk/2. 1–3., 7., 9., Tk/2. 4–6., 8.; Mgy. 6.01–6.12.

31. óra | **41–42. óra** | **Adott tulajdonságú ponthalmazok**

Adott ponttól, egyenestől, párhuzamos egyenespártól, a szakasz két végpontjától, a konvex szög két szárától adott távolságra fekvő pontok halmaza. Több ponthalmaz együttes vizsgálata.

Emelt szinten: Adott tulajdonságú ponthalmazok alkalmazása szerkesztési feladatok megoldásában.

Ponthalmazok távolsága, párhuzamosság, merőlegesség. A kör, a gömb, a hengerfelület; a szakasz felezőmerőlegese, a szögfelező; nevezetes szögek szerkesztése, háromszögek szerkesztése.

A háromszög köré és a háromszögbe írható kör szerkesztésének előkészítése.

Lineáris függvény; halmazok közös része.

Tk/2. 10–25.; Mgy. 6.11–6.30.; Fgy. 4.1.08–14.

32–33. óra | **43–45. óra** | **Síkidomok, sokszögek, háromszögek**

A síkidomok és a sokszög értelmezése; szabályos sokszögek, sokszög átlóinak száma, konvex, illetve konkáv síkidomok, sokszögek. A háromszög fogalma, tulajdonságai, csoportosításuk; a háromszög oldalairól, illetve külső és belső szögeiről tanult összefüggések. Az euklideszi szerkesztés fogalma. A háromszögszerkesztés alapesetei.

Sorozatok, függvények; kombinatorika. Halmazok, logika, halmazműveletek.

Tengelyes szimmetria; alapvető szerkesztési eljárások; nevezetes szögek szerkesztése.

Tk/2. 26–30., **Tk/2. 27., 29.**; Mgy. 6.31–6.50.; Fgy. 4.1.17–19., 4.1.22–23., 4.3.01.

34. óra | **46–47. óra** | **A háromszög nevezetes vonalai, pontjai I.**

A háromszög oldalfelező merőlegesei; köré írható körének megszerkesztése konkrét feladatokban.

Emelt szinten: A tétel bizonyítása, alkalmazása szerkesztési feladatokban.

A szakasz felezőmerőlegese. Ponthalmazok közös része.

Tk/2. 31–33.; Mgy. 6.51.; Fgy. 4.1.16.

35. óra | **48–49. óra** | **A háromszög nevezetes vonalai, pontjai II.**

A háromszög szögfelezői (értelmezés, szerkesztés). *A háromszögbe írható kör* megszerkesztése konkrét feladatokban.

Emelt szinten: A tétel bizonyítása, alkalmazása szerkesztési feladatokban.

Szögfelező. Nevezetes szögek szerkesztése. Ponthalmazok közös része.

Tk/2. 34–35.; Mgy. 6.52.; Fgy. 4.1.15.

36–37. óra | 50–51. óra | **A háromszög nevezetes vonalai, pontjai III.**

A háromszög magasságvonalai, magasságpontja.

A háromszög középvonala.

A háromszög súlyvonalai, súlypontja.

A háromszög területe, a háromszögszerkesztés alapesetei.

Megjegyzés: A könyvben bizonyítás nélkül közöljük, hogy a magasságvonalak, illetve a súlyvonalak egy pontban metszik egymást. *Érdeklődő tanulóinknak* elmondhatjuk, hogy az egybevágóság, illetve a hasonlóság alkalmazásával bizonyíthatjuk ezeket a tételeket (lásd A tananyag feldolgozása című részben a 71., illetve a 74. oldalon). Ezeknek a bizonyításoknak a tárgyalása a középiskola feladata.

Tk/2. 36–41., **Tk/2. 39.**; Mgy. 6.53–6.60.

38–41. óra | 52–56. óra | **Pitagorasz tétele**

A Pitagorasz-tétel előkészítése, bizonyítása, a tétel alkalmazása egyszerű számításokban. Gyakorlati alkalmazások.

Emelt szinten: A Pitagorasz-tétel megfordítása.

Érdekességek a Pitagorasz-tétel történetéből (olvasmány).

A tétel alkalmazása összetett síkgeometriai, illetve térgeometriai feladatokban.

Egymással derékszöget bezáró vektorok összegzése.

Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás. A számológép alkalmazása.

Sorozatok. Egyenletek, egyenlőtlenségek.

A derékszögű koordináta-rendszer.

Térkép.

Állítás és megfordítása.

Tk/2. 42–51., **Tk/2. 47., 50., B1–B7.**; Mgy. 6.61–6.80.; Fgy. 4.1.41–43., 4.1.50–52.

42. óra | 57–58. óra | **Négyszögek**

A négyszögekről tanultak rendszerezése, a négyszög belső szögeinek összege; négyszögek szerkesztése.

Halmaz, logika.

Szögpárok. A háromszög belső szögeinek összege; háromszögek szerkesztése.

Tengelyes és középpontos szimmetria.

Tk/2. 52–58., **Tk/2. 56.**; Mgy. 6.81–6.90.; Fgy. 4.1.20–21., 4.1.24–27.

43–44. óra | 59–61. óra | **A sokszögek területe. A kör kerülete, területe**

A terület fogalma és mértékegységei. A *háromszögek* és a *négyszögek* területének kiszámítása. A *kör* és részei. A kör kerülete és területe.

Emelt szinten, jobb csoportban: A körív hossza, a körgyűrű és körcikk területe.

Normálalak. A számológép alkalmazása. Derékszögű koordináta-rendszer.

A Pitagorasz-tétel alkalmazása a terület meghatározásában. Racionális, irracionális számok. Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás. Egyenes arányosság. Szögmérés, középponti szög.

Tk/2. 59–72., **Tk/2. 59–61., 63. 72.**; Mgy. 7.13–7.44., 7.55., 6.21–6.30.; Fgy. 4.1.28–33., 4.1.38–40., 4.1.44., 4.1.46., 4.1.49., 4.4.14., 4.1.08–14.

45–46. óra | 62–63. óra | **A testekről tanultak áttekintése, kiegészítése I.**

Testek. *A sokszöglapokkal határolt testek felszíne.*

Az egyenes hasáb származtatása, hálója, felszíne, térfogata.

Halmaz, logika. Testek merőleges vetületei.

Területszámítás, Pitagorasz-tétel. Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás.

Adott sűrűségű testek tömegének kiszámítása.

Tk/2. 73–80., **Tk/2. 73–74., 78., 80.**; Mgy. 7.41–7.50.; Fgy. 4.3.01–09.

47–48. óra | 64–65. óra | **A testekről tanultak áttekintése, kiegészítése II.**

Az egyenes körhenger származtatása, hálója, felszíne, térfogata.

Emelt szinten, jobb csoportban alapszinten is: Hengerszerű testek.

A kör kerülete és területe. Adott tulajdonságú ponthalmazok. A forgástest fogalma.

Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás Adott sűrűségű testek tömegének kiszámítása.

Tk/2. 81., B8., **Tk/2. 82–85.**; Mgy. 7.51–7.55.; Fgy. 4.3.10.

49–51. óra | 66–69. óra | **Gyakorlás. A 3. felmérés megíratása**

Mértékegységek átváltása; háromszögek szerkesztése; a Pitagorasz-tételről, valamint a terület-, kerület-, felszín- és térfogatszámításról tanultak alkalmazása (gyakorlati jellegű feladatokban is). A folyamatos ismétlés és a hiányok pótlásának megszervezése.

Felvételi vizsgára készülőknek: Fejtörő feladatok megoldása.

A a Pitagorasz-tétel alkalmazásakor, illetve terület-, a felszín- és a térfogatszámítás során gyakoroltassuk a zsebszámológép használatát.

A gúlával, a kúppal és a gömbbel kapcsolatosan ne adjunk feladatokat a 3. felmérésben.

Tk/2. 92.; B24–B42.

52–53. óra | **70–74. óra** | **Gúla, kúp, gömb**

Ismerkedés a *gúlával;* a *gúla* származtatása, testhálója, felszíne.

Tk/2. 86–90., **Tk/2. 87.**; Mgy. 7.57–7.58.; Fgy. 4.3.01., 4.3.11–14.

Emelt szinten kiegészítő anyagként (megfelelő óraszám mellett): A gúla testmagasságának, illetve az oldallapok magasságának kiszámítása. *A gúla térfogata.*

Az egyenes körkúp származtatása, felülete, felszíne, térfogata.

A gömb származtatása, felülete, felszíne, térfogata.

Ezeket az anyagrészeket (a félévet lezáró dolgozat megíratása után) esetleg önálló munkában dolgozzák fel tehetségesebb tanítványaink, és kiselőadásban számoljanak be róla az osztály előtt. A tételek bizonyítása középiskolában is emelt szintű követelmény.

Pitagorasz-tétel. Százalékszámítás. Hatványozás, négyzetgyökvonás.

A háromszög, a speciális négyszögek, a szabályos sokszögek területe.

Tk/2. 91., B9–B10., B11–B16., B17–B23.;
Mgy. 7.59–7.60.; Fgy. 4.3.15–20., 4.1.08–14.

3. Algebra

54–57. óra | **75–78. óra** | **Algebrai kifejezések**

Az algebrai kifejezésekről tanultak ismétlése, összefoglalása és gyakorlása: Együttható, változó. Algebrai egészek helyettesítési értékének meghatározása. Egynemű, különnemű kifejezések. Összevonás. Többtagú kifejezések szorzása egytagú kifejezéssel. Szorzattá alakítás kiemeléssel, zárójelbontás.

Emelt szinten kiegészítő tananyag (megfelelő óraszám mellett): Többtagú kifejezés szorzása többtagú kifejezéssel, nevezetes azonosságok.

Műveletek racionális számokkal. Műveleti tulajdonságok, műveletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás. A számológép használatának gyakorlása.

Szöveges feladatok. Geometriai számítások.

Tk/3. 1–15., B1–B8., **Tk/3. B9–B15.**;
Mgy. 3.01–3.60., 3.61–3.65.; Fgy. 2.7.01–50., 2.3.32., 2.7.51–54.

58–60. óra | **79–80. óra** | **Egyenletek, egyenlőtlenségek**

Nyitott mondat fogalma; nyitott mondat alaphalmaza, igazsághalmaza (megoldáshalmaza). Egyenlet, egyenlőtlenség, azonosság, azonos egyenlőtlenség.

Halmaz, részhalmaz. Állítások logikai értéke. Abszolútérték.

Helyettesítési érték. Műveletek racionális számokkal; műveleti sorrend.

Szorzat, hányados pozitív, negatív, 0 volta. Legkisebb közös többszörös.

Tk/3. 16–20.

61–64. óra | **81–82. óra** | **Egyenletek, egyenlőtlenségek algebrai megoldása**

Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelv alapján. Azonos átalakítások, ekvivalens átalakítások fogalma. Tört együtthatós egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása.

Műveletek racionális számokkal; műveleti sorrend. Algebrai kifejezés helyettesítési értéke, összevonása, szorzása, osztása egytaggal; zárójelbontás, kiemelés.

Tk/3. 21–25., B1–B8., **Tk/3. B9–B15.**; Mgy. 9.31–9.38.; Fgy. 5.2.11–22.

65–68. óra | **83–85. óra** | **Szöveges feladatok megoldása**

Számok, mennyiségek közti összefüggések felírása egyenlettel, egyenlőtlenséggel.

Összeg, különbség, szorzat, hányados. Százalék, arány. Terület, térfogat.

Megjegyzés: Az egyenlettel megoldható szöveges feladatokkal a következő kompetenciákat fejlesztjük: Szövegértelmező képesség, problémaérzékenység, ismeretek alkalmazása szokatlan feladathelyzetekben. Ezért a *folyamatos ismétlés során* is oldassunk meg minél több ilyen feladatot.

Tk/3. 26–37.; Mgy. 4.22–4.30.; Fgy. 2.8.25–28., 2.8.32.

86. óra | **A helyiértékes írásmóddal kapcsolatos feladatok**

Számok helyiértékes írásmódjával kapcsolatos szöveges feladatok megoldása.

Helyiérték, alakiérték, helyiérték-táblázat. 10 hatványai. Kombinatorika.

A feladatok többségét következtetéssel, tervszerű próbálgatással is célszerű megoldatnunk.

Tk/3. B16–B17.; Mgy. 4.31–4.32.; Fgy. 2.8.33.

87–88. óra | **Geometriai számításokkal kapcsolatos feladatok**

Geometriai számításokkal kapcsolatos szöveges feladatok megoldása.

A sokszögek tulajdonságai. A sokszögek belső szögeinek összege, átlóinak száma. A háromszög-egyenlőtlenség. Pitagorasz tétele. Háromszögek, speciális négyszögek, kör kerülete, területe. Hasáb és henger felszíne, térfogata. Mértékváltás.

Tk/3. B18., **Tk/3. B19–B22.**; Mgy. 4.33–4.35.; Fgy. 2.8.29–31.

89–90. óra | **Fizikai számításokkal kapcsolatos feladatok**

Fizikai számításokkal kapcsolatos szöveges feladatok megoldása. Út, idő sebesség közti összefüggések. „Egyszerű gépek” adatainak meghatározása. A térfogat, tömeg, sűrűség közti összefüggések.

Mértékváltás, mértékegységek. Arány, arányosság.

Tk/3. B23–B24., **Tk/3. B25–B29.**; Mgy. 4.36–4.37.; Fgy. 2.8.34–36.

91–92. óra **Keveréses feladatok**

Különböző mennyiségű és minőségű anyagok keverésével kapcsolatos szöveges feladatok megoldása.

Százalékszámítás; arány, arányosság, aránypár.

Törtrész meghatározása. Törtrészből következtetés az egészre.

Kapcsolat a kémiával.

Tk/3. B30–B34.; Mgy. 4.38–4.40.; Fgy. 2.8.37.

93–94. óra **Együttes munkavégzéssel kapcsolatos feladatok**

Együttes munkavégzéssel kapcsolatos szöveges feladatok megoldása.

Mértékváltás, mértékegységek. Arány. Törtrész. Műveletek törtekkel.

Tk/3. B35–B36.; Mgy. 4.41–4.42.; Fgy. 2.8.38–42.

69–71. óra 95–97. óra **Gyakorlás. A 4. felmérés megíratása**

Algebrai kifejezések átalakítása, helyettesítési értékük meghatározása. Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelv alkalmazásával. Szöveges feladathoz egyenlet, egyenlőtlenség felírása, a megoldás meghatározása, ellenőrzése a szöveg alapján.

A folyamatos ismétlés és a hiányok pótlásának megszervezése.

Mértékegységek átváltása. A geometriában, illetve a fizikában tanult ismeretek alkalmazása.

Százalékszámítás.

Tk/3. 38–41.

4. Geometriai transzformációk

72–76. óra 98–101. óra **Az egybevágóságról tanultak áttekintése**

Pont-pont függvények, a *geometriai transzformáció* fogalma. Az *egybevágóság* fogalma. *A háromszögek egybevágóságának alapesetei.*

Tengelyes tükrözés, *középpontos tükrözés.* Tengelyesen szimmetrikus és középpontosan szimmetrikus alakzatok.

A derékszögű koordináta-rendszer.

Háromszögek, négyszögek, szabályos sokszögek szerkesztése.

Nevezetes szögek. Szögpárok. A paralelogramma tulajdonságai.

Logika: állítások logikai értékének eldöntése; a „van olyan ...”, illetve a „minden ...” kvantor értelmezése.

Tk/4. 1–2., **Tk/4. 3–4.**, Tk/4. 5–10.; Mgy. 8.06–8.15.; Fgy. 4.2.01–06., 4.2.25–28.

77–78. óra | **102–103. óra** | **Eltolás**

Az eltolás fogalma, végrehajtása, tulajdonságai.

Emelt szinten: Az eltolás tulajdonságainak alkalmazása szerkesztésekben, bizonyításokban.

Vektor. Geometriai szerkesztések. Derékszögű koordináta-rendszer.

Tk/4. 12–16., B1–B11.; Mgy. 8.16–8.25.

79. óra | **104–105. óra** | **Forgatás**

A forgatás fogalma, tulajdonságai.

Emelt szinten: A forgatás végrehajtása. A forgatás tulajdonságainak alkalmazása szerkesztésekben, bizonyításokban. Forgásszimmetrikus alakzatok.

Az elfordulás mérése irányított szöggel. Geometriai szerkesztések. Derékszögű koordináta-rendszer.

Tk/4. B12–B15.; Mgy. 8.26–8.35.; Fgy. 4.2.01–06., 4.2.25–28.

80–81. óra | **106–107. óra** | **Összefoglalás**

Az egybevágósági transzformációk összefoglalása, rendszerezése.

Emelt szinten: Az egybevágóságon alapuló számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatok. A háromszög középvonala.

Egybevágósági transzformációk végrehajtása. Szögpárok.

A háromszög nevezetes vonalai, pontjai.

Tk/4. B16–B18.; Mgy. 8.36–8.50.; Fgy. 4.2.04–29., 4.4.15–16.

82–84. óra | **108–110. óra** | **Hasonlóság**

A hasonlóság fogalma. A hasonlóság aránya. Feladatok a hasonlóság felismerésére, gyakorlati jellegű alkalmazására.

Emelt szinten: A hasonlóság alkalmazása háromszögek, téglalapok hiányzó adatának meghatározására.

Térkép ismerete, használata. Műszaki rajzok. Az arány fogalma, egyenes arányossági következtetések.

A tanult négyszögek tulajdonságainak felelevenítése.

Egybevágóság, egybevágósági transzformációk. Szakaszfelezés. A Pitagorasz-tétel alkalmazása.

Tk/4. 17–21., **Tk/4. 22–23.**, Tk/4. 24., B19–B24.; Mgy. 8.51–8.66.

111–112. óra **Háromszögek hasonlósága**

A háromszögek hasonlóságának alapesetei. Háromszögek hasonlóságán alapuló szerkesztési, bizonyítási és számítási feladatok.

Szakasz egyenlő részekre osztása. Szakasz felosztása adott arányban.

Szakköri foglalkozáson: A háromszögek súlyvonalaira, illetve súlypontjára vonatkozó tételek bizonyítása.

Háromszögszerkesztés. Háromszög szögeinek összege. Kicsinyítés, nagyítás fogalma, aránya. Arány, arányos osztás. Szögpárok.

Az egybevágóság mint a hasonlóság speciális esete.

Tk/4. B25–B41., **Tk/4. B34.**; Mgy. 8.67–8.76.; Fgy. 4.2.30–35.

113–114. óra **Hasonló síkidomok területének aránya**
Hasonló testek térfogatának aránya

A matematikai gondolkodás fejlesztése szempontjából fontos *kiegészítő anyagrész.*

A terület és térfogat fogalma, mértékegységei. A tanult síkidomok területe, testek felszíne és térfogata. Hasonló síkidomok szerkesztése.

Tk/4. B42–B45., B47., **Tk/4. B46., B48.**; Mgy. 8.77–8.81.; Fgy. 4.2.24–26.

85–88. óra **115–118. óra** **Középpontos hasonlóság**

Középpontos hasonlóság fogalma, tulajdonságai. Külső és belső hasonlósági pont. Hasonló alakzatok szerkesztése a középpontos hasonlóság felhasználásával.

Emelt szinten: Középpontos hasonlóság segítségével megoldható számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatok.

Arány. Szakasz felosztása adott arányban. Középpontos tükrözés. Háromszögek hasonlósága. A vektor fogalma. Vektorok skalárral való szorzása (előkészítés).

Kapcsolat a fizikával: lencsék képalkotása.

Tk/4. 25–28., B49–B56., **Tk/4. 29., B52.**;
Mgy. 8.82–8.102.; Fgy. 6.1.06., 4.2.36–43., 4.4.17.

89–91. óra **119–121. óra** **Gyakorlás. Az 5. felmérés megíratása**

A tengelyesen tükrös, illetve a középpontosan tükrös sokszögek felismerése. Sokszög egybevágósági transzformációval kapott képének megrajzolása (esetleg megszerkesztése). Alaprajz, térkép, nézeti rajz értelmezése. Háromszög középpontosan hasonló képének megrajzolása (emelt szinten esetleg megszerkesztése).

A folyamatos ismétlés és a hiányok pótlásának megszervezése.

Tk/4. B57–B71., 30., **Tk/4. 30/7.**

5. Relációk, függvények, sorozatok

92–93. óra | **122–123. óra** | **Hozzárendelés, függvény, szám-szám függvény**

Hozzárendelések vizsgálata, ábrázolása nyíldiagrammal, táblázattal, grafikonnal.

Jobb képességű csoportban: A hozzárendeléssel, függvénnyel kapcsolatos fogalomrendszer áttekintése.

Kifejezések helyettesítési értéke. Geometria: A terület fogalma. Fizika: Erő.

Tk/5. 1–2., B1–B3.; Mgy. 5.01–5.05.; Fgy. 3.1.07–09.

94–96. óra | **124–125. óra** | **Egyenes arányosság, lineáris függvény**

Egyenes arányosság, lineáris (elsőfokú, nulladfokú) függvény értelmezése, ábrázolása. Szöveggel adott lineáris függvények leképezési szabályának felírása.

Tapasztalatgyűjtés: A lineáris függvény transzformációja. Szöveges feladatok. Az áru mennyisége és ára közti kapcsolat. Fizika: Hőmérséklet-változás. Egyenletes mozgás.

Tk/5. 3–4., **Tk/5. 5.**; Mgy. 5.06–5.15.; Fgy. 3.2.01–06.

97–98. óra | **126–127. óra** | **Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal**

Grafikonok olvasása, készítése, elemzése. A függvény növekedésének, csökkenésének vizsgálata a grafikon segítségével.

Fizika: Hőmérséklet-változás. Mozgásgrafikonok; a sebesség fogalma, mértékegységei.

Tk/5. 6–11.; Mgy. 5.16–5.30.; Fgy. 3.1.01–08., 3.2.09–10.

99–100. óra | **128–130. óra** | **A sorozat mint függvény**

Sorozatok, a sorozatok folytatása adott, illetve felismert szabály alapján. Számtani, illetve mértani sorozatok vizsgálata. Különbségsorozat, hányadossorozat meghatározása.

Jobb képességű csoportban: Számtani és mértani sorozat értelmezése, akárhányadik tagjának és a tagok összegének kiszámítása. Kamatoskamat-számítás.

Kiselőadások: Érdekes sorozatok.

Algebrai kifejezések helyettesítési értéke. Százalékszámítás. Geometria.

Tk/5. 12., B4–B10., **Tk/5. B6., B9.**; Mgy. 5.36–5.41.; Fgy. 3.4.01–32.

101–103. óra | 131–133. óra | **Néhány nemlineáris függvény**

Az *abszolútérték függvény*, az $f(x) = x^2$ *függvény*, a *négyzetgyök függvény* és a *fordított arányosság* értelmezése, grafikonjának megrajzolása, vizsgálata.

Abszolútérték; számok négyzete, négyzetgyöke. Fordított arányossági következtetések.

Tk/5. 13., **Tk/5. 14.**; Mgy. 5.42–5.48.; Fgy. 3.1.12–15., 2.4.19.

104–105. óra | 134–135. óra | **Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása**

A lineáris függvényekről tanultak alkalmazása egyenletek megoldásában.

Jobb csoportban kitekintésként: Nemlineáris egyenletek megoldásával is foglalkozunk.

Egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség, azonos egyenlőtlenség. Szöveges feladatok.

Lineáris, illetve nemlineáris függvények.

Tk/5. B45., B47., **Tk/5. 17–19.**; Mgy. 5.49–5.52.; Fgy. 3.2.11., 3.3.11.

106–107. óra | 136–137. óra | **Gyakorlás. A 6. felmérés megíratása**

Mennyiségek közti kapcsolatok vizsgálata, az összefüggés szabályának felírása, táblázat, grafikon értelmezése, mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal. Egyenes és fordított arányossági következtetések. Az egyenes arányosság mint függvény. Lineáris függvény értelmezése, vizsgálata, grafikonjának megrajzolása. Egyenletek grafikus megoldása. Az abszolútérték függvény, az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának megrajzolása. Sorozatok folytatása adott, illetve felismert szabály alapján. Számtani, illetve mértani sorozatok vizsgálata.

A hiányosságok pótlásának megszervezése.

Tk/5. B20–B27., 20.

138–140. óra | **Függvények összekapcsolása**

Kiegészítő tananyag: Új függvények előállítása valós szám hozzáadásával, illetve valós számmal szorzással. (A tanulócsoport képességének és a rendelkezésre álló időnek megfelelő részletességgel tárgyaljuk.).

Abszolútérték, számok négyzete, négyzetgyöke. helyes műveleti sorrend. Geometriai transzformációk.

Tk/5. B11–B12.; Fgy. 3.3.01–10., 3.3.15.

108–111. óra | 141–144. óra | **Tartalék órakeret**

Az országos kompetenciamérésre való felkészítés, illetve a felmérés megíratása.

A központilag előírt időpontban használjuk fel.

Tk/6. 1–26., B1–B7.

A TANANYAG FELDOLGOZÁSA

1. Gondolkozz és számolj!

„Ha intuitíve megértettünk néhány egyszerű állítást ..., akkor igen hasznos ezeket folyamatosan, megszakítás nélkül átgondolni, kölcsönös kapcsolataikat latolgatni, és közülük minél többet, amennyit csak lehetséges, egyszerre felfogni. Ily módon biztosabbá válik tudásunk, és jelentősen növekszik befogadó készségünk."

(*Pólya György*)

A 8. osztályos tankönyv első fejezete a *halmazelméleti* alapismeretek áttekintése után a *számtan*, *számelmélet* korábban tanult ismereteit dolgozza fel, majd kiegészíti ezeket a *kombinatorika, valószínűség* és *statisztika* anyagrészek tárgyalásával. Ezzel lényegében „lefedve" a tanterv ezen témakörökkel kapcsolatos követelményrendszerét. Ezek olyan ismeretek, amelyekkel az előző években már sokat foglalkoztak a tanulók. Megsejtettek tételeket (műveleti tulajdonságok, a hatványozás azonosságai, oszthatósági szabályok stb.), konkrét esetekben sejtéseiket igazolták is, összefüggéseket kerestek különböző anyagrészek között.

Felméréseink azt mutatják, hogy a tanulók egy részénél nagyon sok olyan ismeret hiányzik, amely nélkül sem 8. osztályban, sem a középiskolában matematikai tevékenység nem folytatható. Ilyenek például: a számfogalom, írásbeli műveletek, műveletek negatív számokkal és törtekkel, műveleti tulajdonságok alkalmazása, műveleti sorrend, zárójelek használata, hatványozás, az oszthatósággal kapcsolatos alapismeretek, arány, arányosság, százalékszámítás, egyszerű szöveges feladatok értelmezése és megoldása.

Az elmúlt években hangsúlyeltolódás tapasztalható a matematikai követelményrendszerben. A „hagyományos" szöveges feladatok mellett (a felvételi vizsgákon és a kompetenciamérésben) nagy számban fordulnak elő *olyan gyakorlati jellegű szöveges feladatok*, amelyekben táblázatot, diagramot, grafikont kell értelmezni és elemezni a szöveggel adott információk segítségével. Ezek nagy része a *statisztika* és a *valószínűség* témakörhöz kapcsolódik. Ez indokolja ezeknek a témaköröknek az első fejezetbe sorolását.

Az általános iskolai tananyag és követelmények szintjén a számtan (aritmetika), az algebra, a függvények-sorozatok, továbbá a valószínűség és statisztika témakör sem didaktikailag, sem tartalmilag nem választható el élesen egymástól. Ezért a tankönyv 1., 3. és 5. fejezetében feldolgozott anyagrészek tárgyalása (sorrendjében, tartalmában, hangsúlyaiban, követelményeiben) sokféleképpen oldható meg. A tankönyv szerzői (a felmérések és a kísérletek alapján) azért döntöttek a tankönyvben adott felépítés mellett, mert az átlagos vagy az átlagostól nem túlságosan eltérő osztályokban így megoldhatók az aktuális didaktikai feladatok. Az *alternatív programok* kidolgozásához a bővített tankönyv kiegészítő fejezeteiben adunk javaslatokat.

Didaktikai feladataink:

1. A halmazelmélet elemeiről tanultak tudatosítása. *Emelt szinten*: ismerkedés a halmazelméleti jelölésekkel. (A *redukált programban* nem jut rá idő.)
2. A korábban tanult aritmetikai és számelméleti ismeretanyag *felszínre hozása*, *begyakoroltatása, elmélyítése,* a hiányosságok kiküszöbölése.
3. A *számológép* rutinszerű használatának begyakoroltatása. (Ez fontos *alapkészség*!)
4. *Tartalmi bővítés*. Vagyis úgy ismételünk, hogy közben újat is tanítunk. *Alapszinten* a négyzetre emelést, a négyzetgyökvonást, *emelt szinten* például a 10 negatív egész kitevőjű hatványainak értelmezését, a 0 és 1 közé eső számok normálalakját.
5. *Új kapcsolatok* „felfedeztetése”. Például: az elem és *ellentettjének* összege 0, azaz az összeadásra nézve a neutrális elem; az elem és *reciprokának* szorzata 1, azaz a szorzásra nézve a neutrális elem.
6. A tanult ismeretek (például a százalékszámítás, diagramok, grafikonok elemzése, készítése) *gyakorlati alkalmazása*.

Természetesen ezek a célok csak differenciáltan valósíthatók meg. A **differenciálás** az egyes témakörök kiválasztásában, a tárgyalás mélységében, illetve a témakörre fordított óraszámban is tükröződhet.

A *gyengébb képességű csoportokban*, főképpen ha csak heti 3 óra áll rendelkezésünkre, meg kell elégednünk az alapműveletek, a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás gyakoroltatásával, a számológép használatának megtanításával, egyszerűbb következtetési és százalékszámítási és statisztikai feladatok megoldásával.

Törekedjünk arra, hogy azok a tanulóink, akik középiskolában tanulnak vagy oda készülnek, teljes egészében tanulják meg és gyakorolják be a fejezetbe tartozó tananyagot. Ezt csak akkor érhetjük el, ha a korábbi években már jól elsajátított és begyakorolt anyagrészekre kevesebb időt fordítunk annál, mint amit a tanmenetjavaslat előír, és az így felszabadult időt az új ismeretek megtanulására, gyakorlására és az új összefüggések felismertetésére fordítjuk.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A *halmazelmélet alapjaiból* annyit tanítunk, amennyi a későbbiek során a fogalomrendszerek kialakításához, a műveletek és a számelmélet tanításához nélkülözhetetlen. (Érvényesül a halmazelmélet eszközjellege.)

   A *redukált programban* továbbra is csak eszközjelleggel használjuk a halmazokról tanultakat. A fogalmak tudatosítására nem jut idő.

   Emelt szinten, de jobb csoportban *alapszinten is*, a korábbi években tanult halmazelméleti ismereteket *általánosíthatjuk*, s megfogalmaztathatjuk a halmazműveletek definícióját, felismertethetjük a *logikai műveletekkel* való kapcsolatát. Esetleg bevezethetjük a halmazelméleti jelöléseket is.

2. A *hatványozás* tanítása során nem lépünk túl a 7. osztályban tanultakon. Összefoglaljuk, rendszerezzük, általánosítjuk az eddigi ismereteket, kapcsolatba hozzuk azokat a számelmélettel, a műveletekkel. Speciális esetként értelmezzük a számok négyzetét. A számok hatványait számológép segítségével határozzuk meg.

   Jobb csoportban: konkrét feladatok megoldásával előkészíthetjük a hatványozás azonosságainak a tanítását, illetve a negatív egész kitevőjű hatvány értelmezését. Esetleg *általánosíthatják* is a tanulók a felismert összefüggéseket.

3. Felelevenítjük az egynél nagyobb számok normálalakjáról tanultakat.

   Jobb csoportban alapszinten is: számításokat is végeztethetünk a normálalakkal, foglalkozhatunk a 0 és 1 közé eső számok normálalakjának értelmezésével, és megtaníthatjuk, hogy a számológép segítségével hogyan számolhatunk a normálalakkal.

4. A számelmélet alapjainak tanításánál hangsúlyozzuk annak eszközjellegét (legnagyobb közös osztó – törtek egyszerűsítése, legkisebb közös többszörös – törtek bővítése).

   Jobb csoportban elemezzük a tételek szerkezetét, tudatosítjuk a bizonyítások szükségszerűségét.

5. Az egész számokkal és törtekkel végzett műveletek gyakoroltatása most is fontos feladat (az algebra alapja a szilárd aritmetikai eszköztudás). Ugyanakkor a természetes számokkal, illetve a tizedestörtekkel végzett írásbeli műveletek sulykoltatása helyett a zsebszámológép rutinszerű használatának a megtanítása kerül előtérbe.

6. A racionális számok fogalmának kialakításánál megmutatjuk a természetes, az egész, a tört, a racionális számok közti halmaz, részhalmaz viszonyt. Tudatosíthatjuk, hogy vannak nem racionális számok is.

   Jobb csoportban áttekinthetjük a *racionális számkör felépítését:*

   A természetes számok fogalmát, véges halmazok számosságaként, absztrakcióval alakítottuk ki. A negatív számokét a természetes számkör bővítéseként, konstrukcióval. (Minden a számhoz konstruálunk egy olyan a' számot, az a szám ellentettjét, amelyre igaz, hogy $a + a' = 0$.) A **Tk/1. 39.** feladat megoldása során indokoltathatjuk az egész számok bevezetésének szükségességét. A racionális számok halmazához úgy jutottunk el, hogy az egészek halmazát bővítettük oly módon, hogy bevezettük a szorzás inverzét. Az is tűnjék ki ebből a tárgyalásmódból, hogy a számstruktúrákat úgy bővítjük, hogy az eredeti számkörben megismert műveleti tulajdonságok továbbra is érvényben maradjanak.

7. A négyzetre emelés (és a négyzet területe) fogalmának alkalmazásával értelmezzük a szám *négyzetgyökét*. A négyzetgyököt *számológép* segítségével határozzuk meg.

8. *Arány, arányosság, százalékszámítás* mint a racionális számokkal végzett műveletek gyakorlati alkalmazása. A tanulók jelentős hányadának gondot okoz az ehhez a témakörhöz tartozó feladatok megoldása. Ezért tartjuk fontosnak, hogy itt ismét felelevenítsük ezeket az ismereteket, tudatosítsuk kapcsolatukat más anyagrészekkel.

9. Változatos *kombinatorikai feladatok* megoldása különböző módszerekkel, konkrét, a tanuló számára áttekinthető halmazok esetén (szemléletformálás és tapasztalatgyűjtés szintjén).
10. *Valószínűségi kísérletekben* meg kell figyeltetni az események gyakoriságát, értelmezni kell a relatív gyakoriságot, meg kell becsültetni a valószínűséget (szemléletformálás és tapasztalatgyűjtés szintjén).
11. Az egyszerű statisztikai vizsgálatok végrehajtását, diagramok, táblázatok elemzését minden tanulótól megkövetelhetjük.

Kapcsolódási lehetőségek

Az első fejezet a korábbi évek aritmetikai anyagának ismétlése, szintézise, kevés új anyaggal kiegészítve. Ezért magától értetődően az egész fejezet feldolgozására jellemző lehet a komplexitás, az egymástól látszólag „távol lévő” témakörök közti összefüggések kiemelése.

Halmazok, logika

A kapcsolódást az első alfejezet, valamint a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény** első fejezetének feladatsoraival valósíthatjuk meg. Halmazelméleti, illetve logikai eszközöket alkalmazhatunk a számhalmazok egymáshoz való viszonyának áttekintésére, az állításokban szereplő logikai műveletek helyes értelmezése, illetve oszthatósági problémák megoldására (**Tk/1. 18., 28., B4., B10., 120.** feladat).

Algebra

Az algebrai kifejezésekről és az egyenletekről, egyenlőtlenségekről tanultakat a 3. fejezetben foglalja össze és egészíti ki a tankönyv. Ennek ellenére a számstruktúrák áttekintésekor célszerű a megfelelő egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását, illetve az algebrai kifejezések helyettesítési értékének meghatározását is gyakoroltatni. A műveleti tulajdonságokat és a hatványozás azonosságait is általánosan, azonosságok formájában rögzítjük. A természetes számkör bővítései során egyszerű elsőfokú, majd a négyzetgyök fogalmának kialakításakor egyszerű másodfokú egyenletek megoldhatóságát vizsgáljuk. (**Tk/1. 7., 12., 13., 15., 17., 20., 34., 35., 39–41., 51., 58., 68., 73.**)

Függvények, sorozatok

Az egyenes és fordított arányossági következtetéseket önálló alfejezetben ismételjük át. Ezekhez a témakörökhöz szorosan kapcsolódik a százalékszámítás, majd a szintén önálló alfejezetben a matematikai statisztika. A műveletek gyakorlása során meghatároztathatjuk sorozatok hiányzó elemeit. (**Tk/1. B5., 10., 42., 81–83., 85–89., 112., 115–118., B16–B20., B31.**)

A számok négyzete és négyzetgyöke fogalmának kialakításához hasznos lehet a megfelelő függvények értelmezése és vizsgálata (lásd 5. fejezetben).

Geometria, mérés

A geometriai számítási feladatok legalább annyira hozzá tartoznak a számtan, algebra témakörhöz, mint a geometriához. Ezért célszerű itt is kapcsolatot teremteni a két anyagrész között (**Tk/1. 10., 26., 55.** *e)*, **67., 71., 76–78., 81., B20., B22.** feladat).

Kombinatorika, valószínűség, statisztika

Ezek a témakörök önálló alfejezetekben szerepelnek a fejezet végén.

A *kombinatorika* szorosan kapcsolódik nem csak az aritmetikához, hanem a halmazok, logika, a relációk, függvények témakörökhöz is. Például a számok osztóinak többszöröseinek meghatározása során is alkalmaznunk kell kombinatorikai gondolatmeneteket.

A *valószínűség-számítási* feladatok megoldása során alkalmazzuk az arányról, a százalékszámításról tanultakon túl a kombinatorikai gondolatmeneteket is.

A *statisztikai* problémák megoldásában racionális számokkal végzett műveleteket és a százalékszámítást gyakoroltathatjuk. A grafikonok, diagramok készítése, elemzése aritmetikai és függvénytani ismereteket tételez fel. A kördiagram megszerkesztésekor geometriai (szögmérés) ismereteket alkalmazunk.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Mit tanultunk a halmazokról?

Elsősorban a halmazok megadására, jelölésükre, a velük végzett műveletekre kell koncentrálnunk, nem feledve, hogy a halmazelmélet alapjait eszközjelleggel tanítjuk, és ezen a szinten elemi eszköztudásként minden tanulótól meg is követelhetjük.

A középiskolai deduktív felépítésnek itt rakhatjuk le az alapját, ezért fontos annak tudatosítása, hogy:

- mit jelent a „halmaz”, „elem”, „eleme”, és hogy ezek *alapfogalmak*, tehát nem definiálhatók;
- egy halmazt akkor adtunk meg egyértelműen, ha bármely dologról, fogalomról stb. el tudjuk dönteni, hogy eleme-e a halmaznak vagy sem;
- egy halmazba annak minden eleme egyszer és csakis egyszer tartozhat bele.

Javasoljuk, hogy (konkrét feladatokban) mutassuk meg a halmazműveletek és a matematikai logika műveleteinek kapcsolatát.

A Venn-diagram mellett adjunk példát más ábrázolásra is.

Megjegyezzük, hogy ennek a korosztálynak a fejlett országok többségében megtanítják a halmazelméleti jelöléseket. *Jobb képességű csoport* esetén mi is dönthetünk így.

A bővített tankönyv *A halmazokról tanultak kiegészítése* című alfejezetére, illetve a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény** 1.1. fejezetére támaszkodva ilyen szinten is feldolgozhatjuk ezt az anyagrészt. (A feladatgyűjtemény 1.2. fejezetének feladataival bármilyen témakör tárgyalásához kapcsolódva színezhetjük az órát.)

Természetes számok

Nehezen tanuló gyerekek esetében főleg a műveletek értelmezésére és végrehajtására, a műveleti tulajdonságokra, az elnevezésekre, a zárójelek használatára, a műveletek sorrendjére kell hangsúlyt helyeznünk.

Felméréseink szerint már az egyszerű szöveges feladatok értelmezése és megoldása is gondot okoz sok tanulónak. Ezért egész évben folyamatosan oldassunk meg ilyen (például a **Tk/1. 7.**-hez hasonló) feladatokat.

Ha a tanulóink az elmúlt években kellően elsajátították ezeket az ismereteket, és jól begyakorolták a műveleti eljárásokat, akkor nem kell külön órát fordítanunk erre a témakörre, differenciált otthoni munkával dolgoztathatjuk fel a feladatokat. Ebben az esetben a műveleti tulajdonságokat a racionális számok ismétlése során tekinthetjük át.

Használd a zsebszámológépet!

Javasoljuk, hogy tanulóink már az általános iskola első négy osztályában ismerkedjenek meg és barátkozzanak meg a számológéppel. A 13–16 éves korosztálynak a tanterv már előírja a számológép használatának megtanítását. Ugyanakkor nagyon sok kolléga idegenkedik attól, hogy a gyermek ne írásban, hanem számológéppel számoljon. Ezért gondoljuk végig (a teljesség igénye nélkül) azokat az ellenérveket, amelyeket a számológép (elsősorban korai) használata ellen szokás felvonultatni. Ezt azért látjuk szükségesnek, hogy minél biztosabban kerülhessük el az esetleges buktatókat.

1. Ha a *szóbeli számolást* géppel helyettesítjük, akkor gátolhatjuk a műveletek fogalmának kialakulását. A gyerekben a legelemibb műveletek is valami misztikus, csak gép segítségével végrehajtható eljárásként tudatosulnak. Ez károsan befolyásolhatja a matematikai ismeretszerzés teljes folyamatát.

2. A *szóbeli számolásra* nemcsak az írásbeli számolás végrehajtása során van szükség. A mindennapi életben sokszor kell „fejben”, kerekített értékekkel számolva *megbecsülnünk*, majd a becsült értékkel összehasonlítva *ellenőriznünk* az eredményt. Erre a képességre a számológép alkalmazása mellett különösen szükségünk van.

3. A kisiskolások körében végzett felmérések azt mutatják, hogy akik szóban biztosan számolnak, azok (például szöveges feladatok megoldásakor, sorozatok szabályának megkeresésekor, oszthatósági kérdések vizsgálatában) általában jobban átlátják a problémát, bátrabban és tervszerűbben próbálkoznak, nagyobb valószínűséggel találnak ötletes, egyedi megoldásokat. Ebből arra következtethetünk, hogy a *számolási rutin* és az „értékesebb” *matematikai képességek fejlődése között ebben az életkorban igen szoros kapcsolat van.*

4. Bizonyos számítások (például az algebrai kifejezések összevonása, egyenletek megoldása) sokszor nehézkesebbek géppel, mint szóban.
5. Az *írásbeli műveletek* végzése során szerzett *ismeretek, alapkészségek* és *képességek* nem helyettesíthetők teljes mértékben a számológépek használata közben kialakítható *rutinokkal*:

   az írásbeli műveletek elsajátítása során tudatosabbá válik a helyiérték, a tízes számrendszer fogalma, felismeri a tanuló, hogy mit jelent 0-val, illetve 1-gyel szorozni, tudatosan alkalmazza a műveleti tulajdonságokat, a művelet és inverze közti kapcsolatot;

   az írásbeli műveletek gyakorlásakor fejlődik az algoritmusok fegyelmezett végrehajtásának képessége (a tanulónak át kell látni a számolás egészét, ugyanakkor a részeredmények ismeretében kell az egyes lépéseket megtennie), erre a képességre pedig a későbbi tanulmányai során is szüksége lesz.
6. A zsebszámológép használatakor nem minden esetben tudatosul kellően a műveletvégzés helyes sorrendje.

A felsorolt ellenérveket is figyelembe véve tekintsük át a számológépek használata tanításának egy lehetséges programját.

1–2. osztály, *a szóbeli számolási rutin kialakításának folyamata*

Motivációs céllal, a számítások megkönnyítésére és ellenőrzésére, már az iskoláskor legelején is adhatunk számológépet a gyerek kezébe. Néhány ötlet:

   a tanuló szóban számolja ki a műveletsor eredményét, majd géppel végzi el az ellenőrzést;

   a bennfoglalás fogalmának kialakítása és gyakorlása során megmondjuk a szorzat egyik tényezőjét és az eredményt, a tanulónak ki kell találni a másik tényezőt, majd géppel ellenőrzi, hogy jól gondolkozott-e;

   felírjuk a műveletsor komponenseit és az eredményt, a tanulónak kell kitalálni, hogy milyen műveletjelek állnak a számok között, a próbálkozásokhoz használhatja a számológépet;

   a műveleti eredményt szóban becsültetjük meg, géppel számíttatjuk ki;

   adott szabályhoz az egymáshoz tartozó értékpárokat kis számokkal „fejben”, nagyobb számok esetén géppel kerestetjük meg.

3–7. osztály, *az alapvető aritmetikai eszköztudás kialakításának időszaka*

Az írásbeli számolás gyakorlati jelentősége lényegesen kisebb, mint a gépi számolás elterjedése előtt volt. Ezért csupán addig célszerű írásban megkövetelni a számításokat, amíg az írásbeli műveletek gyakorlása a tanulók gondolkodására fejlesztően hathat. Nem javasoljuk, hogy nagy számokkal, vég nélkül gyakoroltassuk a műveleteket. A hagyományos értelemben vett „készség” helyett inkább a „rutin” kialakítása a célunk. (Készségen az eljárások maximálisan begyakorolt, szinte mechanikus végrehajtását értett ék. A rutin inkább az összefüggések tudatos alkalmazását, a rövidítési lehetőségek kihasználását stb. jelenti.)

Sok kolléga csak akkor engedi használni a számológépet, ha az egész tanulócsoport biztosan elsajátította az írásbeli műveleteket. Az egyértelmű tiltás helyett, célszerűbb a tiltás és engedélyezés olyan egyensúlyát megkeresnünk, ami a tanulók számára motiváló, megfelel az aktuális didaktikai célnak és a tanulók fejlettségének.

Differenciálhatunk *a tanulók felkészültsége szerint*. Például:

a korábban már begyakorolt műveletek esetén engedélyezzük a számológép használatát, az újonnan tanultak esetén még nem;

a tanulóknak akkor engedélyezzük a számológép használatát, ha eredményes „vizsgát" tettek az írásbeli műveletekből. Ez a megoldás viszont csak egy darabig motiváló, később már elkedvetlenítheti a lemaradókat. Ezért bizonyos idő eltelte után mindenkinek megengedhetjük a számológép használatát.

Differenciálhatunk *a feladat jellege szerint*. Például:

a kijelölt műveleteket írásban végeztetjük el, de az eredményt számológéppel (esetleg többféle módon) ellenőriztetjük;

az egyenlőtlenség megoldása során nem, az ellenőrzéshez használják a gépet;

a százalékszámításos, kombinatorikai, számelméleti, geometriai stb. számításokat csak egy- vagy kétjegyű számokkal végeztetjük szóban vagy írásban, nagyobb számok esetén számológéppel dolgoztatunk;

a sorozat néhány elemét írásban számoltatjuk ki, a továbbiakat géppel.

Ebben a szakaszban hasznos, ha olyan „egyszerű" gépeket használunk, amelyek nem veszik figyelembe a helyes műveleti sorrendet. A több műveletet, esetleg zárójelet is tartalmazó műveletsorokhoz megterveztetjük a műveletvégzés lépéseit, és a számológéppel lépésenként számíttatjuk ki az eredményt. A számológép alkalmazása lehetővé teszi, hogy sok ilyen feladatot oldassunk meg úgy, hogy a tanulók ne a fárasztó műveletvégzésre, hanem a helyes műveleti sorrend megkeresésére összpontosítsák figyelmüket.

8. osztály

Az előzőekben vázolt stratégiával elérhetjük, hogy a tanulók többsége legkésőbb a 7. osztály végére egyaránt képes írásban és (lépésenként lejegyezve az eredményt) számológéppel is elvégezni a kijelölt műveleteket. Ezután fokozatosan rátérhetünk arra, hogy a megoldási tervnek megfelelő teljes műveletsort az egyes részeredmények lejegyzése nélkül végezze el a tanuló. A továbblépéshez mindenekelőtt meg kell ismernie és meg kell értenie saját számológépének működését és szolgáltatásait. A tankönyvnek ez az alfejezete (esetenként játékos formában) ehhez nyújthat segítséget.

Megjegyezzük, hogy ha tanulóink a korábbi években nem ismerték meg és nem használták a számológépet, akkor a tanmenetjavaslatban biztosított 1-2 óra nem elegendő ennek az anyagrésznek a feldolgozására.

Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy ha saját számológépet kívánnak beszerezni, akkor föltétlenül vegyék figyelembe a következő szempontokat:

a gép a helyes műveleti sorrend szerint dolgozzék;

váltsa ki a (négyzetgyökvonás, logaritmus, szinusz stb.) függvénytábla használatát.

A továbbiakban rendszeresen használjuk a számológépet, így a tanulók a korábban tanultak ismétlésekor (hatványozás, számok törzstényezőkre bontása), illetve az új ismeretek elsajátítása során, (például a négyzetgyökvonás, az átlag kiszámítása) a számológép használatával kapcsolatos ismereteiket is bővíthetik.

Hatványozás

A korábbi években tanultak elmélyítése a célunk. Az elnevezések (hatvány, alap, kitevő) és jelölések ismeretét, s a hatványok kiszámítását minden tanulótól követeljük meg.

Alapszinten is hasznos lehet a tanulók számára, ha konkrét példák megoldásával *tapasztalatot gyűjtenek* a hatványozás azonosságainak magasabb absztrakciós szintű, *deduktív úton történő* feldolgozásához. Már most, nyolcadik osztályban is kamatoztathatják az így megszerzett tudást:

 ha törzstényezőkre bontott számokkal kell számolniuk;

 ha a számok normálalakjával (esetleg számológéppel) számolnak.

A hatványozás speciális eseteként foglalkozzunk a *számok négyzetének* értelmezésével és számológéppel történő kiszámításával.

A számok normálalakja

Ha időhiány miatt 7. osztályban nem foglalkoztunk ezzel az anyagrésszel, akkor most 1-2 órával több időt szánjunk rá.

Az általános iskolában az egynél nagyobb számok normálalakjának értelmezését minden tanulótól elvárhatjuk. A normálalak eszközszerű alkalmazásához olyan háttérismeretekre van szükség, amelyek minimumszinten, különösen a redukált program szerint tanuló osztályokban nem várhatók el (műveletek hatványokkal, a negatív egész kitevőjű hatvány értelmezése).

A 0 és 1 közé eső számokat felírhatjuk egy 1 és 10 közé eső szám és 0,1 valamilyen pozitív egész kitevőjű hatványának szorzataként (lásd **B6.** feladat). Ezzel elő is készíthetjük a 0 és 1 közé eső számok normálalakjának értelmezését és használatát.

Jobb csoportban alapszinten is értelmezhetjük (a helyiérték fogalmához kapcsolódva) 10 negatív egész kitevőjű hatványait, s így a 0 és 1 közé eső számok normálalakját.

A fentieket összegezve javasoljuk, hogy a *jobb képességű tanulókkal* értelmeztessük tetszőleges szám normálalakját, és gyakoroltassuk a normálalakkal történő számolást. Javaslatunk mellett (a teljesség igénye nélkül) a következő érvek szólnak:

1. Megszilárdíthatja a számfogalmat.

2. Megkönnyíti a mértékegységek átváltását.

3. Természetes „terepet” biztosít konkrét hatványokkal végzett műveletekre, ezzel előkészíthetjük az absztrakt tárgyalást.

4. Meggyorsítja és biztosabbá teszi a tanuló munkáját (könnyebben lehet vele számolni, áttekinthetőbb az eredmény, jobban összehasonlítható más értékekkel stb.).

5. Egyes középiskolákban már az első évben maximális begyakorlottságot várnak el ezen a téren (különböző szakmai számításokban is), ezt csak úgy érhetjük el, ha most is használjuk ezt az alakot.
6. A számológép, illetve a számítógép ilyen alakban adja meg a nagy, illetve a kis abszolútértékű számokat.

Osztó, többszörös

Az oszthatósággal kapcsolatos fogalomrendszert hatodik osztályban kellene megtanítanunk, és a leggyengébbek kivételével mindenkitől megkövetelnünk. Vizsgálataink szerint ez nem valósítható meg maradéktalanul. Ezért koncentrikus felépítést javasolunk, és tankönyveinkben ismételten visszatérünk ehhez a témakörhöz.

Ha tanulóink korábban jól elsajátították ezeket az ismereteket és eljárásokat, akkor kevesebb idő is elég azok felelevenítésére és rendszerezésére.

A hatodikos tananyagon *emelt szinten* (illetve középiskolába készülő tanulók esetén) annyiban léphetünk túl, hogy a prímhatványok segítségével határozzuk meg a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst, s definiáljuk az osztó, a többszörös, a prímszám, az összetett szám, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalmát. A számelmélet alaptételét feladatok megoldása során gyűjtött tapasztalatok összegzéseként kimondathatjuk, de bizonyításától célszerű eltekintenünk.

Az oszthatósági szabályok ismeretét mindenkitől elvárjuk, de a tételek pontos kimondását csak az *emelt szinten* tanuló diákoktól kérjük, s bennük alakítsuk ki az egyszerűbb tételek általános igazolásának igényét is (lásd például: **Tk/1. 36., 37.** feladat).

Egész számok

A fejezetben tárgyalt tananyagot már hetedik osztályban minden tanulónak el kellett sajátítania. Nyolcadik osztályban az a feladatunk, hogy ezeket az ismereteket gyakoroltassuk. *Emelt szinten* várjuk el a fogalmak és műveletek helyes értelmezését általánosan is, míg alapszinten, különösen a *redukált program* szerint csak a konkrét műveletek elvégzését kérjük. Ha sok hiányosságot észlelünk, akkor a tanmenetben javasoltnál több órát fordítsunk erre az anyagrészre.

Nehézséget jelenthet az abszolútérték definíciójának megértetése. Konkrét számok segítségével világítsunk rá, hogy ha az a szám negatív, akkor az ellentettje pozitív, vagyis a szám abszolútértéke $|a| = -a$ lesz. Előfordulhat, hogy az ellentett és az abszolútérték fogalmát a tanuló „keveri”. Ennek a helytelen analógia az oka. Nevezetesen, mivel -5 abszolútértéke $+5$, tehát változik a szám előjele, így a $+5$ előjelét is megváltoztatják, ha az abszolútértékét képezik. Sok ellenpéldával ez a hiba is kiküszöbölhető.

Gyakoroltassuk a *zárójelek felbontását* (**Tk/1. 45., 47–50., 60.**).

A tankönyv **Tk/1. 51., 58., 68.** és a feladatgyűjtemény **2.8.07–10.** feladatának megoldásával, a fokozatosság elvét szem előtt tartva, az *egyenletek* és *egyenlőtlenségek* megoldásában alkalmaztatjuk az egész számokkal végzett műveleteket és a zárójelek használatát. Az egyenlőtlenségek negatív számmal való szorzására, illetve az ekkor elkövethető hibákra hívjuk fel a figyelmet! Az **Tk/1. 40.** feladatsorral megmutathatjuk, hogy miért (és mikor) változik az egyenlőtlenség „iránya”.

A fejezethez több feladat kapcsolódik, mint amennyi néhány óra alatt feldolgoztatható. Ezekkel a feladatsorokkal a hosszú távú, folyamatos ismétlést is szervezzük meg.

Racionális és irracionális számok

A törtszám fogalmának kialakítása, a törtekkel végzett műveleti eljárások megtanítása szintén a korábbi évek feladata volt. A tankönyvből és a feladatgyűjteményből válogatva az osztálynak, illetve az egyes tanulónak optimálisan megfelelő feladatok megoldatásával elevenítsük fel, szilárdítsuk meg és fejlesszük tovább ezeket az ismereteket. Ha egyes tanulók bizonytalanul számolnak a törtekkel (vagy a negatív számokkal), akkor föltétlenül *szervezzük meg a felzárkóztatást*. Ne feledkezzünk meg a többiek tudásának szinten tartásáról, a hosszú távú, folyamatos ismétlésről sem.

Bár már eddig is sokszor hangsúlyoztuk, de most is célszerű kiemelni a 0-val való osztás értelmetlen voltát. A legtöbb hiba e téren az osztandó és az osztó fogalmának nem kellő ismerete. (Keverik a tanulók a „nullát osztani” a „nullával való osztással”.)

Elevenítsük fel, hogy a törttel való szorzás, a törtrész kiszámítását jelenti az egész mennyiségből, míg a törttel való osztás segítségével az egységnyi értéket kapjuk meg a törtrészből.

A *racionális számok tizedestört alakjának* értelmezésekor tudatosítjuk, hogy két egész szám hányadosaként felírható számok a racionális számok, s ezek véges vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban írhatók fel. Mindenképpen beszéljük meg, hogy egy tört pontosan akkor írható fel véges tizedestört alakban, ha tovább nem egyszerűsíthető alakjában, a nevező prímtényezős felbontásában, csak a 2 és az 5 prímhatványai fordulnak elő. Egyébként végtelen szakaszos tizedestörtet kapunk. Az osztó (nevező) és a szakasz hosszának kapcsolatát is „felfedeztethetjük”.

Kiemelkedő képességű tanulókkal felismertethetjük azt is, hogy mikor kapunk tiszta, illetve mikor vegyes szakaszos tizedestörtet. Megmutathatjuk a végtelen szakaszos tizedestört visszaalakítását törtalakba, de megtanulását ne követeljük meg.

Vegyes gyakorlófeladatok

A negatív egész számokra tanult műveleti szabályokat alkalmazzuk a tört alakban és a tizedestört alakban írt racionális számokra, így integráljuk az előző két anyagrész feldolgozása során felelevenített ismereteket. A feladatok többségét folyamatos ismétlés keretében, esetleg otthoni egyéni munkában oldassuk meg.

A számok négyzetgyöke

A gyakorlat igénye (négyzet területéből az oldal meghatározása, egyenletek megoldása, Pitagorasz tétele) indokolja ennek az anyagrésznek a tanítását. Célszerű megmutatnunk az alaphalmaz szerepét. Például: $T = 4\ dm^2$-ből a négyzet oldala $a = 2$ dm, viszont az $x^2 = 4$ egyenletből $x_1 = +2$ és $x_2 = -2$.

Felhívjuk egy gyakran előforduló hibára a figyelmet. Az $x^2 = 4$ egyenlet megoldásakor $x_1 = +2$ és $x_2 = -2$ gyökök adódnak. Ebből sok tanuló a $\sqrt{4} = \pm 2$ összefüggést véli kiolvasni, pedig a $\sqrt{4} = +2$ az igaz (ebben állapodtunk meg). Ne mondjuk azt, hogy a „gyökvonás kétértékű művelet” , mert ezzel mintegy előidézzük a fenti hiba előfordulását ($\sqrt{4} = -2$ sohasem teljesülhet, mert a bal oldalon pozitív, a jobb oldalon pedig negatív szám áll.)

A számok négyzetgyökét zsebszámológéppel határoztassuk meg. Figyeljünk oda, a tanulók felismerték-e, hogy a saját számológépükön hogyan kell végrehajtani a négyzetgyökvonást. Miután meghatároztuk egy szám négyzetgyökét, mindig ellenőriztessük a megoldást. Ezáltal a művelet és az inverze közti kapcsolat is előtérbe kerül.

A *jó képességű tanulóknak* mutassuk meg és indokoljuk a $\sqrt{x^2} = |x|$ összefüggést.

Hívjuk fel a középiskolába készülő tanulók figyelmét arra, hogy bár mi az irracionális számokat általában négyzetgyökvonás eredményeként kapjuk, végtelen sok olyan irracionális szám létezik, amely nem állítható elő ily módon. (Mi csak egy ilyen számról, a π-ről tanultunk.)

Arány, arányosság, százalékszámítás

A fejezet fontosságát mutatja, hogy az országos, illetve a nemzetközi felmérésekben igen sok feladatot adnak fel ezekkel a témakörökkel kapcsolatosan. Ezért a 6. és a 7. osztályban tanult ismereteket alaposan elevenítsük fel és gyakoroltassuk be. Nehezítsük olyan összetett feladatokkal, amelyekben az egyenes és a fordított arányosság is szerepel, valamint többszörös árleszállítás, illetve árnövelés fordul elő. Tehát a korábbi ismereteket problémaszituációkban alkalmaztatjuk, s megmutatjuk ezen feladatoknak a *gyakorlatban való használhatóságát* is. Az itt tanultakat majd a valószínűség-számítási, illetve a statisztikai feladatok megoldása során mélyíthetjük el.

Hányféleképpen?

Az előző évfolyamok matematika tankönyveiben szinte minden fejezetben volt olyan feladat, amely a kombinatorika (és a valószínűség) témaköréhez is kapcsolódott. Ugyanakkor önálló alfejezetet (feladatgyűjtemény jelleggel) csak a nyolcadikos könyvben alkot. Most sem az ismeretrendszer kiépítése, hanem *a szemléletfejlesztés legyen a célunk*.

A fejezet feladatrendszereinek feldolgozását a tanulók tudásszintjéhez, képességeik fejlettségéhez, érdeklődésükhöz és a rendelkezésre álló tanítási órák számához igazítsuk.

A Kerettanterv előírása szerint változatos kombinatorikai feladatokat kell megoldatnunk különböző módszerekkel, konkrét, a tanuló számára áttekinthető halmazok esetén. A feladatok alpontjai segítséget adnak, módszert sugallnak a teljes megoldáshoz.

Közöttük olyan „szabvány” feladatok is vannak, amilyenekkel már az előző években is találkoztak a tanulók. Most elsősorban a kombinatív gondolkodásmód fejlesztését szolgálják. A feldolgozásuk során végigjárathatjuk azokat a lépcsőfokokat, amelyeken a tanulók már korábban is elindultak:

1. adott feltételnek megfelelő egy vagy több eset előállítása;

2. minél több, a feltételnek megfelelő eset előállítása;

3. az esetek rendezése különböző szempontok szerint;

4. az összes eset előállítása valamilyen rendezőelv segítségével;

5. az összes eset számának meghatározása;

6. az (összes és a kiválasztott) elemek számának, illetve a kiindulási feltételeknek (ismétlődhetnek-e az elemek, számít-e a sorrend) rendszeres változtatása, az eredmények megfigyelése, összehasonlítása;

7. az eredmények táblázatba rendezése, a konkrét adatokhoz kapcsolódóan az összefüggések felismerése, magyarázata;

8. a felismert összefüggések általánosítása, formulák megfogalmazása és bizonyítása.

Nem várható el minden tanulótól, hogy a felsorolt „lépcsőfokokat” végigjárja. Az általános összefüggések felismerése, bizonyítása és alkotó alkalmazása még a tehetséges tanulók számára sem lehet követelmény, annak ellenére, hogy néhányan eljuthatnak erre a szintre.

Nagy hibát követnénk el, ha deduktív úton, az általános összefüggések kimondásával és bizonyításával kezdenénk a tanítást, és a képleteket „alkalmaztatva” oldatnánk meg a kombinatorikai feladatokat, mert éppen a legfontosabbat, a szemléletfejlesztést hagynánk el. Ugyanakkor saját magunk számára célszerű átgondolnunk ezt az ismeretrendszert.

n elem egy **ismétlés nélküli permutációját** kapjuk, ha az elemeket sorba rendezzük (az elemek mind különbözők).

Ezt a fogalmat a **Tk. 1.** példa, a **Tk/1. 90.; Mgy. 9.06–9.09.**, illetve **Fgy. 5.1.01.** feladat feldolgozásával tovább mélyíthetjük. A „sorba rendezés” azt jelenti, hogy az *n* elemű halmaz elemeit kölcsönösen egyértelműen az $\{1; 2; ...; n\}$ halmaz elemeihez rendeljük. Az ismétlés nélküli permutáció fogalmához kapcsolódik még a **Tk/1. 91., 94.** *a)*, **96., 97.** *a)*, **98.** *a)*, **105.** *a)*, *b)*, *c)* feladat és a **Fgy. 5.1.02–08., 5.1.29**. feladat.

Az **1.** példa (és a **Mgy. 9.06.**, valamint a **Fgy. 5.1.01.** feladat megoldása) ismerteti azt a gondolatmenetet, ahogyan az ismétlés nélküli permutációk számát meghatározhatjuk. Ezt általánosítva juthatnak el az érdeklődő tanulók az általános összefüggés felismeréséhez:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (n > 1)$$

Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy az $n!$ (*n* faktoriális) értelmezéséhez hozzá tartozik a $0! = 1$ és $1! = 1$ megállapodás is.

Az **ismétléses permutáció** esetén megszabjuk, hogy melyik elem hányszor ismétlődhet (**Tk/1. 98., 105.** *d)*, *e)*; **Mgy. 9.10.; Fgy. 5.1.26–28., 5.1.30–31.**):

Ha az n tagú elemrendszerben $i, j, ..., m$ számú elem megegyezik ($i + j + ... + m = n$), és ezt az elemrendszert sorba rendezzük, akkor az n tagú elemrendszernek egy ismétléses permutációját kapjuk.

Az n tagú elemrendszer ismétléses permutációinak száma:

$$P_n^{i, j, ..., m} = \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot ... \cdot m!}$$

Az összefüggés bizonyításának gondolatmenetét a **Mgy. 9.10.** és a **Fgy. 5.1.30.** feladat megoldása részletezi.

n elem k tagú **variációját** kapjuk, ha egy n elemű halmaz elemeiből k tagú *sorozatot* képezünk (kiválasztjuk és sorba rendezzük az elemeket; például a tankönyv **92–94.**, **100.**, a gyakorló **9.11–9.12.** és a feladatgyűjtemény **5.1.14–25.** feladata).

Ha mindegyik elem különböző, akkor *ismétlés nélküli* (**2.** példa), ha az elemek között lehet azonos, akkor *ismétléses* (**3.** példa) variációról beszélünk. (Az ismétléses permutációval szemben nincs megszabva, hogy melyik elem hányszor ismétlődik.)

Az ismétlés nélküli permutáció speciális ismétlés nélküli variáció ($k = n$).

A feladatgyűjtemény **5.1.15.** feladata alkalmat ad arra, hogy itt is kapcsolatot találjunk a függvény fogalmával. A sorsoláskor a (sorszámokkal jelölt) tárgyakhoz egyértelműen hozzárendeljük a társaság tagjait. Ha egy ember több tárgyat is nyerhet (ismétléses variáció), akkor a hozzárendelés nem kölcsönösen egyértelmű.

n elem k tagú ismétlés nélküli variációinak száma ($n \geqq k$):

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

A bizonyítás gondolatmenetét a tankönyv **2.** példáján kívül a **Mgy. 9.12.** feladata és a **Fgy. 5.1.14–15.** feladatának megoldása fejti ki részletesen.

n elem k tagú ismétléses variációinak száma (az n és a k tetszőleges pozitív egész szám): $V_n^{k(i)} = n^k$

(Lásd tankönyv **3.** példa, **Mgy. 9.11.; Fgy. 5.1.16–17.** feladat.)

n elem k tagú **ismétlés nélküli kombinációját** kapjuk, ha egy n elemű halmaz elemeiből k tagú részhalmazt képezünk, vagyis kiválasztjuk, de nem rendezzük sorba az elemeket. (Tankönyv **4.** példa, **Tk/1. 94.** *c)*, **101–103.** feladat, **Mgy. 9.13., 9.16.** feladat, feladatgyűjtemény **5.1.32–36.** feladat. Ezeknek a feladatsoroknak a feldolgoztatása alkalmas a variáció és kombináció közti különbség és kapcsolat felismertetésére.)

Az ismétlés nélküli kombinációk száma ($n \geqq k$):

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

A feladatgyűjtemény **5.1.32.**, illetve a **5.1.33.** feladatának megoldásában kétféle gondolatmenetet találunk az összefüggés bizonyítására (az ismétléses permutációra, illetve az ismétlés nélküli variációra vezethető vissza a megoldás).

Az ismétléses kombinációkkal nem célszerű foglalkoznunk.

Külön felhívjuk a figyelmet a „nem szokványos” kombinatorikai feladatokra: **Tk/1. 121., B22., B33., Tk/6. 1., 4., B3.** Ilyen feladatokra számíthatnak a tanulók a felvételi vizsgákon, illetve az országos (és a nemzetközi) felméréseken.

Valószínűségi kísérletek és számítások

A kísérletek elvégzésével, a feladatok megoldásával nem az a célunk, hogy a gyerekek megismerjék a valószínűség-számítás szabályait. Feladatunk most is a szemléletfejlesztés. Ennek (a többéves) fejlesztési folyamatnak tekintsük át a csomópontjait:

1. Valószínűségi „játékok” és kísérletek végzése, táblázatok készítése, a *lehetséges*, a *lehetetlen*, a *biztos esemény* megkülönböztetése. (A feladatgyűjtemény 137–138. oldalán összefoglaltuk a valószínűségi kísérletek értelmezéséhez szükséges legelemibb fogalmakat.)
2. Az események *gyakoriságának* megfigyelése, összehasonlítása, annak megállapítása, hogy a megfigyelt események közül melyik valószínűbb.
3. Annak felismerése, hogy „egy esemény valószínűbb”, nem azt jelenti, hogy ez az esemény fog bekövetkezni;

   „hányszor várható el” egy esemény, különbözik attól, hogy hányszor fog bekövetkezni egy kísérletben.
4. A *relatív gyakoriság* és a *valószínűség* fogalmának megértése, összehasonlításuk a kísérletben. Annak megfigyelése, hogy hogyan alakul a relatív gyakoriság, ha a kísérletek számát növeljük.
5. A valószínűség meghatározása (kombinatorikai, geometriai) számítással.

A valószínűségi kísérleteket *csoportmunkában* (a csoportok „összedolgozásával”) célszerű megszerveznünk. A csoportok összegzik a tanulók kísérleteinek az eredményeit, majd közösen összegezzük a csoportok eredményeit. Ily módon rövid idő alatt elérhető az események számának növelése. A kísérletekben a tanulókkal meg kell figyeltetni az események gyakoriságát, értelmezniük kell a relatív gyakoriságot, meg kell becsülniük a valószínűséget.

A témakör felértékelődését mutatja, hogy az elmúlt két-három évben a nemzetközi és az országos felmérésekben, illetve a felvételi vizsgákon sokkal több valószínűség-számítási feladatot kaptak a tanulók, mint korábban. Ezeknek a feladatoknak a megoldásához általában nincs szükség mély matematikai ismeretekre, „csupán” logikus gondolkodásra és megfelelő szemléletre. (Ilyen típusú feladatok: **Tk/1. 112–113., 124/8., B20.** *c)*, **B34., Tk/6. 2–4.**).

Statisztikai számítások

A függvényekkel és az aritmetikával kapcsolatos eszköztudás gyakorlati alkalmazásaként foglalkozunk egyszerű statisztikai számításokkal. A kerettanterv szerint az egyszerű statisztikai vizsgálatok végrehajtását minden tanulótól megkövetelhetjük. A tankönyv kidolgozott mintapéldái mintául szolgálhatnak adatok statisztikai feldolgozására.

A témakör gyakorlati életben betöltött szerepe miatt alaposan dolgoztassuk fel ezt az anyagrészt. Fontos a tényleges adatgyűjtés, az adatok táblázatba rendezése, a táblázatok, a grafikonok értékelése. Használjuk a legújabb gazdasági folyóiratokat, statisztikai könyveket, értelmezzük a híradások anyagát stb.

Két változó véletlen kapcsolatának vizsgálata során a grafikonokról és a lineáris függvényről tanultakat nem szokványos gyakorlati feladatok megoldására alkalmazzuk.

A korreláció- és regresszióelemzés, a matematikai statisztika egyik legfontosabb eszköze, igen hatékonyan alkalmazható gyakorlati jellegű, illetve tudományos vizsgálatokban egyaránt. Ugyanakkor a grafikonokról és a lineáris függvényről tanultak alkalmazásaként, a „rácsodálkozás”, tapasztalatgyűjtés és az érdeklődés felkeltésének szintjén, az általános iskolában is javasoljuk ennek a résznek a feldolgozását.

A magunk számára tekintsük át ezeket az ismereteket.

Ha két változóra egy n elemű, összetartozó értékpárokból („pontokból”) álló minta ismert, akkor a pontokat derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva megállapítjuk, hogy azok egy egyenes, egy másodfokú, harmadfokú görbe stb. körül csoportosulnak-e.

Ha egyenes körül, akkor *lineáris korrelációt*, vagyis véletlentől függő lineáris kapcsolatot tételezünk föl a két változó között. A lineáris kapcsolat mérőszáma a korrelációs együttható.

Ha az R korrelációs együttható 1 közelében van, akkor „szoros” lineáris kapcsolatot tételezhetünk fel a két változó között úgy, hogy az egyik változó növekedésével nagy valószínűséggel nő a másik változó is. Ilyen kapcsolatot vizsgáltunk (tényleges mérési adatokból) a **3.** példában, amelyben $R \approx 0{,}95$.

Ha -1-hez közeli értéket vesz fel az R, akkor is szoros lineáris kapcsolatot tételezhetünk fel a két változó között, de így az egyik változó növekedésével nagy valószínűséggel csökken a másik változó. A **4.** (fiktív) példa adatai szerint az egyenlet megoldása során a növekvő időadatokhoz nagy valószínűséggel csökkenő matematika-érdemjegyek tartoznak ($R \approx -0{,}86$).

Ha 0 körüli értéket vesz fel az R (az **5.** példában $R \approx 0{,}10$), akkor nem tételezhetünk fel lineáris kapcsolatot a két változó között. (Lineáristól különböző kapcsolat lehet közöttük, például a pontok elhelyezkedhetnek egy parabolaív mentén.)

A függvény determinisztikus kapcsolat. A véletlen kapcsolatok mint ellenpéldák vizsgálata a függvény fogalmának mélyítését is szolgálja (hiszen a fogalom kialakulásához a példák sokasága mellett a különböző jellegű ellenpéldákra is szükség van). Ezért nem csak a gyakorlati és a tudományos életben betöltött szerepe miatt, hanem tantárgypszichológiai megfontolásból is célszerű foglalkozni ezekkel a feladatokkal.

Fejtörő feladatok felvételi vizsgára készülőknek
Tudáspróba

Ez a két alfejezet sok olyan „új típusú” feladatot tartalmaz, amilyenekkel a középiskolai felvételi vizsgákon, illetve az országos kompetenciamérések során találkozhatnak a tanulók.

2. Síkidomok, felületek, testek

A nyolcadik osztályos geometria-tananyag feldolgozása előtt tételesen ismételjük át és gyakoroltassuk be a korábban tanultakból azt a *minimumot,* amelyet a középfokú oktatás az általános iskolától föltétlenül elvár. A tankönyv 2. fejezetének gerincét ezek az anyagrészek alkotják (a geometriai transzformációkkal a 4. fejezet foglalkozik).

A tananyag *koncentrikus felépítéséhez* hozzátartozik, hogy a korábban tanultakat úgy tekintjük át, hogy továbbfejlesztjük, kibővítjük azokat. A „kibővítéssel” igazodnunk kell az osztály színvonalához, a rendelkezésre álló időhöz, didaktikai elképzeléseinkhez és nevelési célkitűzéseinkhez. A tankönyvi feldolgozással olyan *átlagos képességű tanuló-csoporthoz* kívántunk alkalmazkodni, amelynek a korábbi évekből nem halmozódtak fel „adósságai”. (A feladatsorok „lefelé” és „felfelé” egyaránt kiterjesztik a mozgásteret.)

Ha a matematikát könnyebben tanuló gyermekek egy része is nehezen boldogul a bizonyításokkal és a szerkesztési feladatok megoldásával, akkor azt javasoljuk, hogy inkább csak az általános iskola képzési és nevelési célkitűzéseinek jobban megfelelő anyagrészeket gyakoroltassuk, a tételek bizonyításával csak emelt szinten foglalkozzunk.

A térbeli viszonyok szemléleten alapuló matematikai leírását és ehhez kapcsolódva a *térszemlélet fejlesztését* fontos feladatnak tartjuk (például a középiskolai térgeometria, és egyes szakmai tárgyak tanítása miatt). Ezért semmiképpen sem javasoljuk a térgeometriai tananyag drasztikus csökkentését. Korábban is hangsúlyoztuk, hogy a térszemlélet fejlesztését csak úgy oldhatjuk meg, hogy újra és újra foglalkozunk térgeometriai problémák megoldásával. A térgeometriai fogalmak kialakításához, az összefüggések felismeréséhez *még a legtehetségesebb tanulóknak is szükségük lehet a szemléltetésre, modellezésre.* Például vegyék kézbe a gúla élvázmodelljét, és azon tekintsék át az élek, az oldallap magasságának és a testmagasságnak az egymáshoz való viszonyát. Tanulóink életkori sajátosságaitól sem idegen még az ilyen jellegű tapasztalatgyűjtés.

A feldolgozandó anyagrészek a csoport előképzettségéhez, illetve színvonalához igazodva redukálhatók, (az emelt szintű képzésben a bővített tankönyv kiegészítő alfejezeteivel) bővíthetők, illetve mással helyettesíthetők. Ugyanis nemcsak a konkrét ismeretek megtanításán van a hangsúly, hanem a *geometriai problémamegoldó képesség fejlesztésén*. Ezért ha az általunk tanított csoport színvonala lényegesen eltér az átlagostól, esetleg kevesebb, illetve több idővel rendelkezünk, mint amennyivel az itt közölt tanmenetjavaslat számol, akkor eltérhetünk a tankönyvi feldolgozástól.

Redukált program

Ha heti 3 órában tanítjuk a matematikát, akkor mintegy 10 órával kevesebb időt fordíthatunk ennek az anyagrésznek a feldolgozására, mint egyébként. Elsősorban arra kell törekednünk, hogy a háromszögekről és a négyszögekről korábban tanultakat alaposan átismételjük. Ezt kiegészíthetjük a háromszögek nevezetes vonalaival és pontjaival, ezek megszerkesztésével, de a tételek bizonyítását nem követeljük meg.

A teljesség igénye nélkül foglalkozunk a Pitagorasz-tétellel, megelégszünk a közvetlen síkgeometriai alkalmazásokkal.

Jól begyakoroltatjuk a kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámításról korábban tanultakat, valamint a megfelelő mértékegységek átváltását. Fektessünk különös hangsúlyt a kör kerületének, területének és a körhenger felszínének, térfogatának kiszámítására.

Emelt szintű képzés

Nemcsak bővebb a tananyag, nemcsak mélyebben foglalkozunk az összefüggésekkel, hanem *más stratégiát kell alkalmaznunk a geometriatanításban*, mint a redukált programban, illetve az alapszinten. Erre csak akkor van lehetőségünk, ha tanulóink a korábbi években szilárdan elsajátították az átismétlendő anyagrészeket.

Az általános iskolai geometriatanítással általában igen elégedetlenek a középiskolában tanító kollegák. Ha lehetőségünk van rá, akkor (tanulóink érdekében) ezen a téren is *közelítenünk kell oktatásunk színvonalát a középiskolai elvárásokhoz*. A középiskolai geometriatanítás szemléletében, tárgyalásmódjában lényegesen eltér az általános iskolában megszokottól. Ez nehéz helyzetbe hozhatja a középiskolába lépő tanulót. Nos ez a témakör (is) alkalmas arra, hogy követelmények támasztása nélkül (a gyermek iránti türelem jegyében) hozzászoktassuk a középiskolába készülő, illetve középiskolai tagozatra járó tanulóinkat a deduktív tárgyaláshoz, az egymásra épülő definíciók és tételek megtanulásához, a bizonyításokban nyújtott gondolatmenetek értelmezéséhez, önálló alkalmazásához. Meg kell tanulniuk, hogy az összefüggéseket nem elegendő megsejteniük, azokat már ismert tételek alkalmazásával bizonyítaniuk is kell.

Emelt szinten, jobb csoportban esetleg alapszinten is eljuthatunk annak a felismertetéséhez, hogy egyes adatokat ki lehet, és ki kell számítanunk az adatok közti összefüggések segítségével, például a Pitagorasz-tétel alkalmazásával. Csak ezen a szinten várhatjuk, hogy tanulóink önállóan képesek alkalmazni összetett térgeometriai feladatok megoldásában a Pitagorasz-tételt.

A két szélsőséges megoldáson kívül természetesen még nagyon sokféleképpen tárgyalhatjuk ezt az anyagrészt. Különböző alternatívákra a tananyag-feldolgozás áttekintése során még kitérünk.

Végezetül felhívjuk a figyelmet arra, hogy ezeknek az ismereteknek a megszilárdításához szükségesnek tartjuk az egész éven át tartó folyamatos ismétlést. (Ezt figyelembe vettük a feladatsorok összeállításakor is.)

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Alapvető geometriai fogalmak, elnevezések, jelölések, a hosszúság- és szögmérés áttekintése, szögfajták; szögpárok. Elemi szerkesztések felelevenítése, gyakorlása. A síkidomokkal, sokszögekkel kapcsolatos fogalomrendszer.

Emelt szinten: Az euklideszi szerkesztés fogalma.

2. Ismerkedés az adott tulajdonságú ponthalmazokkal. Két ponthalmaz közös részének meghatározása.
3. A háromszögekről tanultak felelevenítése és rendszerezése. A háromszög belső és külső szögei. A háromszögszerkesztés alapeseteinek gyakorlása. A háromszög nevezetes vonalai, pontjai. (A tételek bizonyítását nem követeljük meg.)

   Jobb csoportban alapszinten is: A háromszög oldalfelező merőlegeseiről, illetve szögfelezőiről kimondott tétel bizonyítása. (A további tételek bizonyításával csak az egybevágósági és hasonlósági transzformációk tanulása után foglalkozhatunk.)

   Emelt szinten: Szerkesztési feladatok a háromszögszerkesztés alapeseteire visszavezethető feladatokban, illetve a nevezetes vonalak, pontok alkalmazásával.
4. A Pitagorasz-tétel és közvetlen alkalmazásai. Például: két pont távolsága a koordináta-rendszerben, egymásra merőleges vektorok összege.

   Emelt szinten: A Pitagorasz-tétel alkalmazása összetettebb síkgeometriai, illetve térgeometriai feladatokban.
5. A négyszögekről tanultak felelevenítése és rendszerezése. Négyszögek szerkesztése a háromszögszerkesztés alapeseteire közvetlenül visszavezethető feladatokban.
6. A kerület- és a területszámítás ismétlése, rendszerezése és gyakorlása.

   Jobb csoportban alapszinten is: A Pitagorasz-tétel alkalmazása speciális háromszögek, négyszögek területének kiszámítása során.
7. A kör és részei, körgyűrű, körcikk. A kör kerülete és területe.

   Jobb csoportban alapszinten is: A körív hossza, a körcikk területének meghatározása a középponti szög, illetve a körív ismeretében; a középponttól adott távolságra lévő húr hossza.
8. Testek. Testek elölnézeti, felülnézeti, oldalnézeti képe. Sokszöglapokkal határolt testek felszínének fogalma, kiszámítása a területszámításról tanultak alkalmazásaként.

   A térfogatszámításról tanultak felelevenítése és rendszerezése, gyakorlása. A térfogat és az űrtartalom mérése, mértékegységei.

   A hasáb, származtatása, testhálója, felszíne és térfogata (ismétlés, rendszerezés).

   Az egyenes körhenger, származtatása, felülete, felszíne és térfogata.

   Jobb csoportban alapszinten is: Hengerszerű testek.
9. A gúla, származtatása, testhálója, felszíne.

   Jobb csoportban alapszinten is: A Pitagorasz-tétel alkalmazása terület-, felszín- és térfogat-számítási feladatok megoldása során.

   Emelt szinten, magasabb óraszám mellett: A gúla térfogata.

   Az *egyenes körkúp*, származtatása, felülete, felszíne és térfogata.

   A *gömb*, származtatása, felülete, felszíne és térfogata.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika; kombinatorika

Halmaz, részhalmaz, halmazműveletek, igaz, hamis állítások; adott tulajdonságú ponthalmazok (**Tk/2. 10**–**25.**). Háromszögek csoportosítása különböző szempontok szerint (**Tk/2. 28.**). Négyszögek különböző részhalmazai közti kapcsolatok vizsgálata (**Tk/2. 53**–**54., B29.**). Testek közti összefüggések áttekintése (**Tk/2. 73**–**74.**).

Kombinatorikus eszközöket alkalmazunk például a sokszögek átlóival kapcsolatos feladatokban (**Tk/2. 27.**)

Számtan, algebra

Műveletek valós számokkal: a kerület-, terület-, felszín- és térfogat-számítási feladatok megoldásában. *Normálalak* alkalmazása a számítások és a mértékegységek átváltása során.

Hatványozás (számok négyzete, illetve köbe), négyzetgyökvonás: a Pitagorasz-tétel alkalmazásakor, illetve a terület-, felszín- és térfogat-számítási feladatok megoldásában.

(A fenti műveleteket, a hatványozást és négyzetgyökvonást számológéppel végezheti a tanuló.)

Arány, egyenes és fordított arányossági következtetések; aránypár.

Algebrai kifejezések: helyettesítési érték, kiemelés (a Pitagorasz-tétel, a terület-, a felszín- és a térfogatképletek alkalmazása).

Egyenlet, egyenlőtlenség: például a háromszög belső szögeinek összegére vonatkozó tétel alkalmazása; a befogó kifejezése a Pitagorasz-tétel segítségével; a magasság kifejezése a speciális háromszög, illetve négyszög területéből; a kör területének kifejezése a kerületéből (**Tk/2. 29.** *g)*, *h)*, **48., 66**–**68., 70**–**71., B24**–**B26.**).

Függvények, sorozatok

Térelemek vizsgálatában (**Tk/2. 4.** feladat). Egyenes arányosság például a téglalap területének értelmezésekor, a körív hosszának és a körcikk területének kiszámításakor. A mérőszám és a mértékegység közötti fordított arányosság alkalmazása.

A geometria egyéb témakörei

Testek merőleges vetületeinek ábrázolása, a merőleges vetületek alkalmazása térgeometriai problémák megoldásában (**Tk/2. 75., B39.**).

Vektor fogalma, vektorok összeadása, kivonása (bővített tankönyv 109. oldal **6.** mintapélda, **Tk/2. B1.** feladat).

Koordinátageometria: (**Tk/2. 20., 51., 62**–**63.**)

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Térelemek

A korábban tanult geometriai ismeretrendszer (elnevezések, jelölések, összefüggések, adatok, definíciók stb.) felelevenítését elsősorban a tanulócsoport tudásszintjéhez igazodva oldjuk meg. Ezért a tankönyvnek ezt a fejezetét ne egy konkrét feldolgozásnak tekintsük, hanem olyan háttéranyagnak (definíciók gyűjteménye, feladatrendszer stb.), amelyre támaszkodhatunk, de amelyet egy az egyben nem taníthatunk meg.

Felzárkóztató szinten ellenőrizzük a legalapvetőbb ismereteket, szerkesztési eljárásokat, a mértékegységek átváltásának az ismeretét, a szögmérésről, szögfajtákról és a szögpárokról tanultakat. A tapasztalt hiányosságokat folyamatos ismétlés keretében próbáljuk kiküszöbölni.

Átlagos képességű és tudású tanulókból álló csoportban a korábbi években kellően begyakorolt ismeretek már nem jelenthetnek gondot. Ilyen csoportokkal oldassuk meg a **Tk/2. 1–4.** feladatot, és „használat közben” elevenítsük fel a továbbhaladáshoz nélkülözhetetlen ismereteket. Különösen hatékony lehet a kiscsoportos foglalkozásban (csoportok összedolgozásával) megszervezett óra, ha a tanulók testmodelleket, élvázmodelleket kapnak a kezükbe.

Emelt szintű képzésben részt vevő tehetséges tanulók számára többféleképpen bővíthetjük a korábban tanultakat.

Kombinatorikai gondolatmeneteket alkalmazva *általánosíthatjuk* (nem a megtanítás igényével) a megfigyelt összefüggéseket (**Tk/2. 4.** feladat).

Pontosíthatjuk a definíciókat. Például értelmezhetjük a zárt és a nyílt szakaszt.

Felvetődik a kérdés, hogy megköveteljük-e a definíciók pontos elsajátítását. Véleményünk szerint a *középiskolába készülő*, illetve *középiskolai tagozatra* járó tanulóknak hozzá kell szokniuk ahhoz, hogy az ismereteket ne csak értsék, hanem azokat *szabatosan megfogalmazni* is képesek legyenek, de ez semmiképpen sem vezethet üres verbalizmushoz, magoláshoz.

Adott tulajdonságú ponthalmazok

Az adott tulajdonságú ponthalmazok (tárgyi szemléltetést, kísérletezgetést is feltételező) vizsgálatával már a korábbi években is foglalkozhattak a tanulók, de az átlagos vagy az átlagosnál gyengébb csoportok, időhiány miatt, semmiképp sem tudták kellő alapossággal feldolgozni ezt az anyagrészt. Ugyanakkor szükségesnek tartjuk, hogy a tanulók szerezzenek elegendő tapasztalatot arra vonatkozóan, hogy hogyan „kezdhetők ki” az ilyen jellegű geometriai problémák. Az alfejezet és a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény** feladatait ilyen céllal válogattuk össze. Az előzőek alapján javasoljuk, hogy lehetőleg minden csoportban, de *emelt szinten* föltétlenül szánjunk kellő időt a feladatok megoldására (beleértve a szemléltetést, a próbálgatásokat, kísérletezgetéseket, a megoldás megtervezését, lejegyzését és a diszkussziót is).

Síkidomok, sokszögek

Jobb csoportban esetleg nem kell külön tanórát fordítanunk ezeknek az ismereteknek a felelevenítésére. A következő fejezetek feldolgozása során tisztázhatjuk az itt áttekintett fogalmakat. A felszabaduló időt tartalékoljuk összetett szerkesztési és bizonyítási feladatok megoldására, kiegészítő anyagrészek feldolgozására.

Háromszögek

A továbblépéshez (a Pitagorasz-tétel, nevezetes vonalak és pontok a háromszögben, majd a következő években a Thalész-tétel, a trigonometria alapjai megtanulásához) minden tanulónak el kell sajátítania a fejezetben áttekintett ismereteket. Végre kell tudniuk hajtani legalább a háromszögszerkesztés négy alapesetét és az ezekhez közvetlenül kapcsolódó szerkesztéseket (**Tk/2. 30.**).

A korábban tanultak áttekintésén túl foglalkozzunk a *háromszög nevezetes vonalaival és pontjaival.* A **Tk/2. 18., 31.** illetve a **34.** feladatok megoldásával készíthetjük elő a *háromszög köré*, illetve a *háromszögbe írható kör* középpontjára vonatkozó összefüggések felismerését, megfogalmazását és a bizonyítás megértését. Ily módon, konkrét feladatokhoz kapcsolódva nem csak a legjobb tanulócsoportban juthatnak el tanulóink a bizonyítások gondolatmenetéhez és a szerkesztési eljárások megértéséhez (ha elegendő időt tudunk biztosítani számukra). Itt elevenítsük fel a háromszög *magasságvonalának* és *középvonalának* fogalmát, majd értelmezzük a háromszög *súlyvonalát*. Ismertetés szintjén, a bizonyítások igénye nélkül, értelmezzük a *magasságpontot* és a *súlypontot.*

A fent említett tételek bizonyításával esetleg *emelt szinten* foglalkozhatunk részletesen, de csak a 4. fejezet anyagához kapcsolódva.

A *háromszög magasságpontjára* vonatkozó tétel bizonyítását már csak az igazán jó képességű tanulók értik meg. Legtöbben a belátás helyett inkább csak elfogadják az összefüggéseket. A nehézséget az okozza, hogy a bizonyítás gondolatmenete látszólag „másfelé tart”, míg végül mintegy „elővarázsoljuk” az eredményt. A jobbakat viszont éppen ez a „bűvészmutatvány” foghatja meg. A megértést nehezíti, hogy önmagukban is nehéz (és esetleg nem kellően begyakorolt) ismereteket kell magas absztrakciós szinten alkalmazni. Egy-egy rávezető feladatsor megoldása elősegítheti a megértést. A fentiek alapján azt javasoljuk, hogy inkább az egybevágósági transzformációk átismétlése után foglalkozzunk ennek a tételnek a bizonyításával és csak emelt szintű képzésben részt vevő csoportban.

A *háromszög középvonalával* kapcsolatos tételt többféleképpen bizonyíthatjuk. Az egybevágósági transzformációkról tanultak segítségével (bővített tankönyv 207. oldal), a háromszögek hasonlóságáról tanultak, illetve a középponti hasonlóság alkalmazásával.

A *háromszög súlypontjával* kapcsolatos tételek bizonyítása is a hasonlóság fogalmához, így a 4. fejezethez kapcsolódik.

Megjegyezzük, hogy ezeknek a tételeknek a bizonyítása középiskolai tananyag, és ott is csak az emelt szintű érettségire készülőktől várható el a bizonyítások reprodukálása.

Pitagorasz tétele
A Pitagorasz-tétel alkalmazása
Érdekességek a Pitagorasz-tétel történetéből

Többféle módon és színvonalon oldhatjuk meg a tananyag feldolgozását. Néhány ötlet a teljesség igénye nélkül:

a) Egy órát szánunk a tétel ismertetésére. Például a tankönyv **1.** mintapéldájának közös megoldása után (ténylegesen elvégzett) átdarabolással igazoljuk a tételt. A hangsúlyt a tétel alkalmazásaira fektetjük.

b) A **Matematika 8. Gyakorló 6.61–6.64.** feladatsorának önálló (részben otthoni) munkában történő megoldása után a tankönyv **1.** mintapéldáját közösen feldolgozva az első órán előkészítjük a tétel általános tárgyalását. (A tankönyv **Tk/2. 42.** feladatát házi feladatként adjuk fel). A következő órán a tanulók megfigyeléseiből kiindulva „felfedeztetjük”, és a tanulók közreműködésével általánosan is bizonyítjuk a tételt és a tétel megfordítását (**Mgy. 6.65.**). Ezt követheti a gyakorlás, majd a kultúrtörténeti háttér megismertetése.

c) Internet segítségével történő „gyűjtőmunkára” és a (bővített) tankönyvben található olvasmányra támaszkodva, esetleg kiselőadásokkal fűszerezve, kultúrtörténeti bevezető keretében ismerkednek meg a tanulók a tétellel és különböző bizonyításaival (erre legalább két órát szánunk). Ezt követheti az összefüggés sokoldalú alkalmazása.

Az *alkalmazások megtanításának javasolt* lépései:

1. Az átfogó kiszámítása a két befogó ismeretében, a számológép használatának gyakorlása.

2. A befogó kiszámítása a másik befogó és az átfogó ismeretében.

3. A tanultak alkotó alkalmazása a téglalap átlójának, a szimmetrikus háromszög és trapéz magasságának stb. kiszámításában, majd a terület- és kerületszámításban. Ezekben a feladatokban a tanulónak kell a derékszögű háromszöget megtalálnia. (Lásd **2.** példa, **Tk/2. 47–49.,** majd később például a **Tk/2. 66–68.** feladat.)

4. Két pont távolságának meghatározása a derékszögű koordináta-rendszerben (lásd **3.** példa, **Tk/2. 51.** feladat).

5. Az első két lépésben tanultak közvetlen alkalmazása gyakorlati jellegű feladatok megoldásában (lásd **4.** és **5.** példa, **Tk/2. 46., 50., B2., B7., 47–49.**).

6. A tanultak alkalmazása vektorok összegzésében (**6.** példa, **B1.** feladat).

7. A tanultak alkalmazása térgeometriai feladatok megoldásában. Ezekben a feladatokban nemcsak a térbeli viszonyok áttekintése jelent problémát (föltétlenül adjunk élvázmodellt a tanulók kezébe), hanem az is, hogy két derékszögű háromszöget kell „összekapcsolni” a megoldáshoz (**Tk/2. B3–B5.** feladat).

A számításokat számológéppel végezzék a tanulók. Tisztázzuk, hogy emlékeznek-e a négyzetre emelés és négyzetgyökvonás végrehajtására. Egyszerű gépek esetén hívjuk fel a figyelmet a helyes műveleti sorrendre.

Négyszögek

Rendszerezzük a négyszögekről tanultakat. A speciális négyszögek egymáshoz való viszonyának áttekintésére javasoljuk a halmazelméleti, logikai eszközök „bevetését” (**Tk/2. 52–54.**, valamint a **B29**). Így ezt a tudást is szinten tarthatjuk. Az összefoglalóban felsorolt fogalmak ismeretét, a legalapvetőbb szerkesztéseket, a kerület kiszámítását minden tanulótól várjuk el.

A négyszögek belső szögeivel kapcsolatos feladatok (**Tk/2. 55–57.**) megoldatása előtt elevenítsük fel a háromszög és a négyszög belső szögei összegéről, illetve a szögpárokról tanultakat.

A definíciók pontos megtanulását, a fogalomrendszer teljes áttekintését, az összetettebb szerkesztési és számítási feladatok megoldását már csak *emelt szinten* kívánhatjuk meg.

A **T/2. 58.** feladatsort folyamatos ismétlés keretében is feldolgoztathatjuk, a területszámítás (és a Pitagorasz-tétel) gyakorlásával párhuzamosan.

A sokszögek területe

A területszámítás megtanítása egyik legsikertelenebb része az általános iskolai matematikaoktatásunknak. Egy felmérésünk szerint az általános iskolát végző tanulók 61%-a volt képes a téglalap területét kiszámítani, a terület mértékegységeit 27%-os biztonsággal tudták átváltani, az egyéb sokszögek területének kiszámítását csak a tanulók töredéke tudta végrehajtani. Ugyanakkor a középfokú oktatás elvárná az általános iskolától ennek a témakörnek a biztos megtanítását. A felszín- és térfogatszámításhoz is nélkülözhetetlen a területszámítás biztos ismerete.

Emelt szinten a mértékegységek átváltásához kapcsolódva gyakoroltathatjuk a *normálalak* használatát.

A korábbiakhoz képest továbblépést jelent a *Pitagorasz-tétel* alkalmazása. Készítsük fel a tanulókat arra, hogy a középfokú iskolákban *nem fogadják el a méréssel nyert eredményeket.*

A kör kerülete, területe

Az alapvető elnevezések, *körvonal, körlap, sugár, átmérő, húr, szelő, körív, körgyűrű, körcikk, körszelet* megértését és használatát, a *kör kerületének* és *területének* kiszámítását minden tanulótól elvárhatjuk.

Jobb tanulóktól elvárhatjuk a körív hosszának, illetve a körcikk területének kiszámítását. Vetessük észre a tanulókkal, hogy adott körben a körcikkhez tartozó középponti szög, a körív hossza és a körcikk területe egyenesen arányos mennyiségek. Számítanunk kell rá, hogy a nehezebben tanuló gyerekeknek már sok nehézséget jelent ezeknek a gondolatmeneteknek a követése és az összefüggések elsajátítása. Ezért gyengébb csoportban, illetve a redukált program szerint időhiány miatt nem föltétlenül kell tárgyalnunk ezeket az ismereteket.

A testekről tanultak áttekintése, kiegészítése
Sokszöglapokkal határolt testek. Az egyenes hasáb
Az egyenes körhenger. Henger

E fejezetek anyagának feldolgozásával átismételjük és rendszerezzük a korábban tanultakat: *a térfogat fogalmát, mértékegységeit, a térfogat- és űrtartalommérés mértékegységei közti kapcsolatot, a sokszöglapokkal határolt testek, a hasáb, valamint az egyenes körhenger fogalmát, hálózatát, felszínét és térfogatát.*

A henger fogalmának átismétlését ne definícióval, hanem modellezéssel, tapasztalatgyűjtéssel kezdjük: a körhenger mint forgástest (például a fizikaszertárból kölcsönzött centrifugagép segítségével szemléltethetjük), a hengerpalást „kiterítése” stb. A definíció önálló megfogalmazását később is csak a jobb képességű tanulóktól várhatjuk el.

Itt is megemlítjük, hogy a hengerpalást (később a kúppalást) területének kiszámítása a szokott módon igen szemléletes, de matematikai értelemben nem tekinthető bizonyításnak. Ugyanis éppen a „kiterítést” nem értelmezzük, csak szemléletünkre támaszkodva elfogadjuk.

A henger térfogatának kiszámításánál elfogadtatjuk, hogy ugyanaz az összefüggés érvényes, mint az egyenes hasáb esetében. Az összefüggés egzakt bizonyításához az általános iskolában nem rendelkezünk a megfelelő ismeretekkel, de a bizonyítás elvét megsejtethetjük, ha a bővített tankönyv 129–130. oldalán leírtakat megbeszéljük.

Felméréseink szerint a térfogat- és felszínszámítással kapcsolatos ismeretrendszert még kevésbé tudják tanulóink, mint a területszámítást. (Például a téglatest térfogatát az általános iskolából kilépő tanulóknak csak a fele tudja kiszámítani, pedig ez minimumkövetelmény.)

A térfogat- és az űrmérés mértékegységei közti kapcsolat megtanulását sokszor hibás analógia gátolja. Sok tanuló szerint 1 dm^3 = 1 dl, 1 cm^3 = 1 cl stb.

Fontosnak tartjuk, hogy ebben a témakörben sok gyakorlati alkalmazással találkozzanak a tanulók. A feladatok megoldása során elevenítsük föl a sűrűség, tömeg, térfogat kapcsolatáról (a fizikában) tanultakat is.

A fejezet és a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény** bőséges feladatanyaga nemcsak az aktuális didaktikai feladat megoldásához, hanem (kellő válogatással) a folyamatos ismétlés megszervezéséhez is elegendő.

Jobb képességű csoportban a hasábról és a hengerről tanultak általánosításaként eljuthatunk a henger (hengerszerű test) általános fogalmához. Ez új szemponttal színesítheti az összefoglalást. *Emelt szinten* esetleg ennek a fejezetnek a feldolgozása lehet a kezdő lépés, és speciális esetként foglalkozunk a hasábbal és a körhengerrel. Viszont ebben a feldolgozásban külön kell értelmeznünk a *forgástestek* fogalmát.

A ferde hasábot és hengert nem tárgyaljuk részletesen. Érdekességként megsejtethetjük, hogy ezekre a testekre is érvényes a korábban tanult térfogatképlet, amit egy csomag kártyával vagy a logikai készlet lapjaival szemléltethetünk (Cavalieri-elv).

Ismerkedés a gúlával

Kiindulásként a gúlát speciális sokszöglapokkal határolt testként (poliéderként) értelmezzük. A testmodellek vizsgálata közben a tanulók felismerik a gúla tulajdonságait, és önállóan is képesek a definíció megfogalmazására. A tanulók által készített vagy a kezükbe adott testmodelleken, élvázmodelleken végeztessünk méréseket. Vetessük észre, hogy a gúla magassága (célszerű megkülönböztetésül *M*-mel jelölni), az oldallapok magassága és az oldalélek mikor különböző hosszúságúak, és mikor egyeznek meg.

Emelt szinten (ha a helyi tanterv előírja, és elegendő időnk van rá), esetleg foglalkozhatunk a gúla térfogatának kiszámításával is. A bizonyítás középiskolai tananyag, és ott is csak az emelt szintű érettségi követelmény.

Átlátszó lapokból készítsünk modelleket az **1.**, illetve a **2.** példa adataival. Ezekbe berajzolhatjuk, illetve szívószálak segítségével kialakíthatjuk azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek egyik befogója vagy az átfogója az oldallap magassága vagy a testmagasság (a feladatok megoldása során rajzoltassuk meg a test látszati képén és külön is ezeket a háromszögeket). Különböző feladatok megoldásának szemléltetésére a tanulókkal is készíttethetünk hasonló modelleket.

A kúp. A gömb

Ha elegendő időnk van rá, akkor valamilyen szinten célszerű szemléletileg megalapozni a kúppal és a gömbbel kapcsolatos fogalomrendszert. Megjegyezzük, hogy ezek a témakörök a fejlett országokban ennek a korosztálynak a tananyagához tartoznak. (Sokan nálunk is elvárják ezeket az ismereteket a középiskolába lépő tanulóktól.)

Fejtörő feladatok felvételi vizsgára készülőknek
Tudáspróba

Ennek a két alfejezetnek a feldolgozásával felkészülhetnek a tanulóink a középiskolai felvételi vizsgák, illetve az országos kompetenciamérések geometria témaköréhez kapcsolódó feladatira. A két alfejezet most is sok olyan „új típusú”, komplex feladatot tartalmaz, amilyenekkel e felmérések során találkozhatnak a tanulók.

3. Algebra

Ebben a részben a tanulók nem ismernek meg új fogalmakat, új eljárásokat. Az *algebrai kifejezésekről*, az *egyenletekről, egyenlőtlenségekről* korábban tanultakat összegezzük, gyakoroljuk, új feladattípusokban alkalmazzuk.

Ha tanulóink többsége a korábbi években jól elsajátította a számtan-algebra témakörhöz tartozó ismereteket, és az év elején kevés időt kell ezek felelevenítésére fordítanunk, akkor a 3. fejezet anyagának nagy részét az év eleji ismétléshez kapcsolhatjuk, míg egyes feladatsorokat – folyamatos ismétlésként – aktuális anyagrészekkel együtt dolgoztathatunk fel. Ily módon a tankönyvi felépítést például a következőképp módosíthatjuk:

1. A természetes számkör, az egész számok és a racionális számok összefogott ismétlése után, azokhoz csatlakozva összefoglaljuk az algebrai kifejezésekről, majd az egyenletek, egyenlőtlenségek fogalomrendszeréről és megoldásáról tanultakat.

   Ehhez a témakörhöz kapcsolható a Szöveges feladatok megoldása egyenlettel, illetve a Szöveges feladatok megoldása egyenlőtlenséggel című alfejezetek feladatanyagának alapos feldolgozása úgy, hogy a feladatok egy részét a folyamatos ismétlés során oldatjuk meg.

2. A természetes számok vagy a számelméleti ismeretek ismétléséhez kapcsolódva foglalkozhatunk a helyiértékes írásmóddal kapcsolatos feladatokkal.

3. A geometriai számításokkal kapcsolatos feladatokat az aktuális geometriai témakörök ismétlésekor, illetve feldolgozásakor oldatjuk meg.

4. A fizikai számításokkal kapcsolatos feladatokat az aktuális fizikai anyagrészek tanulásakor vagy az év végi ismétlésekor is feldolgoztathatjuk (koncentráció a két tárgy között), illetve összekapcsolhatjuk az 5. fejezet egyes témaköreinek (egyenes arányosság; mennyiségek ábrázolása grafikonnal; egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása) tárgyalásával.

5. A **Tk/3. 33–34.** feladatsor és a keveréses feladatok (**Tk/3. B30–B34.**) feldolgozása a százalékszámítás ismétléséhez kapcsolható.

6. Az év végi összefoglalás keretében dolgoztatjuk fel az *Egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség*, *azonos egyenlőtlenség* alfejezet anyagát, valamint a **Tk/3. B9–B15.** és a **38–41.** feladatsort. A korábban tanultakat kibővítjük az *együttes munkavégzéssel* kapcsolatos feladatokkal.

Természetesen nagyon sokféle más felépítés is lehetséges, amelyekben az a közös, hogy az ötödik fejezetet feladatgyűjteményként használjuk, és amelyekben feltételezzük, hogy a korábbi tananyagot szilárdan elsajátították tanulóink.

Ha úgy döntünk, hogy az általunk tanított tanulócsoporttal a tankönyv felépítése szerint célszerű a tananyagot feldolgozni, akkor az egyes anyagrészek eltérő súlypontozásával, a feladatok megválasztásával és a továbbtanulási irányultságot figyelembe vevő követelményekkel alkalmazkodunk a tanulócsoport színvonalához és az egyes tanulók képességeihez. (A tananyag-feldolgozás áttekintésekor ehhez további javaslatokat adunk.)

Alapszintű program

Szükség esetén, a hiányok pótlása céljából *összefoglaljuk* az általános iskolában tanult legelemibb *algebrai* (és szükség esetén az aritmetikai) ismereteket. Elsődleges célunk a korábban szerzett ismeretekben mutatkozó *hiányosságok pótlása*. Törekedjünk arra, hogy a tanulók értsék és használják a legfontosabb elnevezéseket, képesek legyenek egyszerű aritmetikai és algebrai modellek értelmezésére, megadására. Szerezzenek gyakorlatot egyszerűbb *algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámításában*, bármilyen alakban adott racionális számot kell is helyettesíteniük. Ismerjék föl az *egynemű algebrai egész kifejezéseket*, tudják ezeket *összevonni*, tudjanak *egytagú kifejezéseket összeszorozni, zárójeleket felbontani* (ezen belül a többtagú kifejezést egytagú kifejezéssel szorozni). Ezeket az ismereteket tanulóink legyenek képesek alkalmazni egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásában és ellenőrzésében, függvények, sorozatok vizsgálatában, geometriai, fizikai képletek használatában. *Jobb csoportban* alapszinten is megismertethetjük *egyszerű kifejezések szorzattá alakítását kiemeléssel*.

Az egyszerű *lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek* (**Tk/3. 21**–**24.**) megoldását minimumszinten is követeljük meg. A tanulók az elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása és a megoldás ellenőrzése során legyenek képesek tetszőleges alakban adott racionális számokkal – helyes sorrendben – elvégezni a szükséges műveleteket, ismerjék a zárójelek jelentését. Tudatosan alkalmazzák a „mérlegelvet”, a műveleti tulajdonságokat, a törtek átalakításáról, a negatív számokkal és a törtekkel végzett műveletekről, a zárójelek felbontásáról, valamint az algebrai kifejezések összevonásáról és számmal való szorzásáról tanultakat.

A fogalomrendszer kialakításához szükséges, hogy a tanuló találkozzék nem ekvivalens átalakításokkal is, illetve olyan egyenletekkel, amelyeket nem a mérlegelv segítségével old meg. A feladatok között szerepeljenek olyanok, amelyeknek az adott alaphalmazon nincs megoldásuk, végtelen sok megoldásuk van, megoldáshalmazuk az alaphalmaz, továbbá olyan vizsgálatok, amikor ugyanannak az egyenletnek a megoldását különböző alaphalmazon keressük.

Minden tanuló legyen képes egyszerű szöveges feladatok (például **Tk/3. 26**–**27., 29., 33., 35.; Mgy. 3.01**–**3.04., 4.22.**) értelmezésére, aritmetikai és algebrai modell megadására, a feladat megoldására. Az egyenletre vezető szöveges feladatok megoldását *minimumszinten* csak a legegyszerűbb esetekben várhatjuk el.

Az *átlagosnál lényegesen gyengébb csoportban*, különösen ha csak 3 órában tanítjuk a matematikát, redukálnunk kell az egyenlettel megoldható szöveges feladatok megoldására szánt órák számát.

Emelt szintű program

Az általános iskolai számtan-algebra tananyag összefoglalását és rendszerezését összekapcsolhatjuk a tanultak tudatosabb szintre emelésével (megkövetelhetjük a definíciók megtanulását, indokoltatjuk az egyenletmegoldás lépéseit, a szöveges egyenleteket típusokba soroljuk stb.). A tanulóknak egyrészt képessé kell válniuk összetettebb egyenletek, egyenlőtlenségek megoldására is, másrészt ki kell egészítenünk az alapszintnél felsoroltakat a következő követelményekkel:

A tanulók ismerjék föl az azonosságot, egyszerűbb esetekben az azonos egyenlőtlenséget. Legyenek képesek a szöveges feladatokban lévő problémát feltárni, a szükséges és a felesleges adatokat megkülönböztetni, a szükséges adatok közti kapcsolatokat megállapítani, a megoldásra számszerű becslést adni, a megoldás tervét egyenlet, egyenlőtlenség formájában is felírni, a keresett adatot meghatározni, és a megoldást ellenőrizni az eredeti probléma tükrében. Fokozatosan váljanak képessé egyszerű geometriai, illetve fizikai, kémiai stb. képletekben előforduló változók kifejezésére.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A műveletek és a hatványozás gyakorlásához kapcsolódva (a fokozatosság és a differenciálás elvét szem előtt tartva) foglalkozunk az algebrai kifejezésekkel. *Feleleveníjük, összegyűjtjük* és *rendszerezzük* (ha 7. osztályban nem tudtuk kellően feldolgozni, akkor kiegészítjük) azokat az ismereteket, amelyeket a tanulók az algebrai kifejezések témakörből tanultak, és amelyek szükségesek az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásához. Pontosítjuk az *egynemű*, *különnemű*, egész kifejezés, egytag, többtag fogalmakat. Ellenőrizzük, hogy felismerik-e az egynemű algebrai kifejezéseket, végre tudják-e hajtani az összevonást, a zárójelek felbontását (ezen belül a többtagú kifejezés szorzását egytagú kifejezéssel), valamint a kiemelést. Képesek-e ezt az algebrai eszköztudást alkalmazni a lineáris egyenletek megoldásában.

Emelt szinten megismerkedhetnek a tanulók *a többtagú kifejezés többtagú kifejezéssel való szorzásával,* s ennek speciális eseteként *egyes nevezetes azonosságokkal.*

2. A lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek algebrai megoldásának gyakorlása, a „megoldási technika” mint eszköztudás fejlesztése (az egyes tanulók képességeinek és továbbtanulási irányultságának messzemenő figyelembevételével). A megoldás során mind az azonos, mind az ekvivalens átalakítás fogalmát tudatosítjuk.

3. Szöveges feladatok megoldása. Ezen belül új egyenlettípusokkal ismerkednek meg a tanulók. A tipizálás alapja, hogy milyen műveletekkel írhatók fel az összefüggések, illetve milyen (geometriai, fizikai, kémiai stb.) ismeretekhez kapcsolódik a probléma.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Algebrai kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek alaphalmaza (értelmezési tartománya), igazsághalmaza. Halmaz, részhalmaz, üres halmaz. Halmazok egyenlősége.

Számtan, algebra egyéb témakörei

Műveletek (összevonás, szorzás, osztás) a racionális számok halmazán; műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás; az összeadás és a kivonás, illetve a szorzás és az osztás kapcsolata), műveletek sorrendje, zárójelek alkalmazása; abszolútérték, ellentett fogalma.

Két szám aránya, egyenes és fordított arányosság, aránypár; százalékszámítás; törtrész kiszámítása.

Relációk, függvények

A $<$; $>$; $\leqq$; $\geqq$; $=$ relációk vizsgálata. (Esetleg egyenletek grafikus megoldása.)

Geometriai számítások; mérés, mértékegységek

Síkidomok tulajdonságai, sokszögek belső szögeinek összege. Hasonlóság.

Kerület-, terület-, felszín-, térfogatképletek.

Mértékegységek, mértékváltás.

Fizika

Egyenletes mozgás; a sebesség fogalma.

Egyszerű gépek, emelő, hengerkerék; forgatónyomaték.

Hőmérséklet-változás.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Algebrai kifejezések

A feldolgozási módja (feladatok – összefoglalás) is mutatja, hogy ebben a részben nem ismerkednek meg új fogalmakkal a tanulók. Az algebrai kifejezésekről korábban tanultakat rendezzük, rendszerezzük, és (a különböző fejezetek feldolgozásakor) *kapcsolatba hozzuk a matematika egyéb témaköreivel* (például az egyenletek algebrai megoldása, függvények, sorozatok megadása kifejezéssel, geometriai képletek alkalmazása). Feladatunk, hogy az előző hét évfolyamon felhalmozott alapvető algebrai ismereteket összegezzük, és olyan szintre hozzuk, amellyel tanulóink boldogulni tudnak a köznapi életben, illetve meg tudják állni helyüket a középiskolákban.

Ha tanulóink többsége a korábbi években jól elsajátította a számtan, algebra témakörhöz tartozó alapismereteket, és úgy érezzük, hogy kevés időt kell ezek felelevenítésére fordítanunk, akkor ezen alfejezet anyagának nagy részét a szám- és műveletfogalom ismétléséhez, vagyis az év eleji ismétlés témaköreihez kapcsolhatjuk, és az egyes feladatsorokat (folyamatos ismétlésként) az aktuális anyagrészekkel együtt dolgoztathatjuk fel.

Ha úgy döntünk, hogy az általunk tanított tanulócsoporttal a tankönyv felépítése szerint célszerű a tananyagot feldolgozni, akkor *az egyes anyagrészek eltérő súlypontozásával, a feladatok megválasztásával és a továbbtanulási irányultságot figyelembe vevő követelményekkel alkalmazkodunk a tanulócsoport színvonalához és az egyes tanulók képességeihez.*

A helyettesítési érték meghatározása az egész fejezetben súlyponti helyet foglal el. Kezdetben az algebrai kifejezések helyettesítési értékeit számítják ki (lásd **Tk/3. 1–5., 8., 9–10.**), majd egyenleteket oldanak meg, s *ellenőrzik a megoldást.* A helyettesítési érték meghatározása során és az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásakor (problémába ágyazva) egyrészt a törtekkel, tizedestörtekkel, negatív számokkal végzett műveleteket gyakorolják, másrészt figyelembe kell venniük a műveletek elvégzésének sorrendjét és a zárójelezést, alkalmazniuk kell a műveleti tulajdonságokat is. Ezzel az aritmetikai eszköztudásuk is szilárdabbá válik, és a számolási képességek és rutinok (például a számológép használata) is fejlődnek.

A fogalmak lényeges jegyeit ismételten kiemeljük, de a definíciók megtanulását (mivel a mélyebb matematikai összefüggéseket nehezen meglátó tanulók esetén ez mechanikus tanulásra vezethetne) nem követeljük meg. Végül, de nem utolsósorban rávilágítunk az itt tanult ismeretek gyakorlati alkalmazhatóságára. Tudatosítanunk kell, hogy a matematikát nem öncélúan – nem csak magáért a matematikai műveltségért – kell tanulnunk, hanem azért, mert a köznapi problémák megoldásához is nélkülözhetetlen a matematikai gondolkodásmód és eszköztudás.

Emelt szinten az általános iskolai anyag összefoglalását és rendszerezését összekapcsolhatjuk a tanultak kiegészítésével, tudatosabb szintre emelésével. Elvárhatjuk, hogy a tanulók ismerjék az algebrai kifejezésekkel kapcsolatos fogalmak pontos értelmezését, és a felismert összefüggéseket általánosan is megfogalmazzák. (Például megköveteljük a definíciók megtanulását.) A fogalmak lényeges jegyeinek kiemelésén túl arra is törekszünk, hogy kialakítsuk az algebrai fogalmak rendszerét, megmutassuk ennek a fogalomrendszernek más rendszerekkel (például az aritmetikával) való kapcsolatát. A tanulóknak képessé kell válniuk összetettebb feladatok megoldására is. Ezen a szinten a tanulók legyenek képesek egyszerű algebrai egész kifejezést szorzattá alakítani kiemeléssel. Megjegyezzük, hogy sem az algebrai egész kifejezések szorzattá alakítását, sem az algebrai törtek vizsgálatát nem kell „készre tanítanunk”.

Nevezetes azonosságok

A *nevezetes azonosságokat* (bővített tankönyv 156–158. oldal.) a jobbaktól sem követeljük meg „készségszinten”. Ugyanakkor jó lehetőséget biztosít a több tag szorzása több taggal algoritmusának megbeszélésére és begyakorlására. Még nem várhatjuk el, hogy a tanulók összegalakban is felismerik a nevezetes szorzatot. Például nem követelhetjük meg a szorzattá alakítást: $4a^2 + 20ab + 25b^2 = (2a + 5b)^2$

Egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség, azonos egyenlőtlenség

A fejezet feladatanyagának feldolgozása során tudatosítjuk a „nyitott mondat” és a „kijelentés”, valamint az „egyenlet” és az „azonosság”, illetve az „egyenlőtlenség” és az „azonos egyenlőtlenség” fogalmak közti kapcsolatot és különbözőséget.

Az *emelt szinten* tanulók előtt váljék világossá, hogy míg a *kijelentésnek* van logikai értéke (vagy igaz vagy hamis), addig a *nyitott mondatnak* (általában) nincs. A nyitott mondat akkor válik kijelentéssé, ha az ismeretlen helyére behelyettesítünk egy elemet az alaphalmaz elemei közül. Az egyenlet, egyenlőtlenség megoldásának vizsgálatakor fel kell ismerniük, hogy *azonosságról*, *azonos egyenlőtlenségről* van-e szó, vagy sem.

Az *átlagos vagy az annál gyengébb képességű* tanulók esetében ne a definíciók megtanulására, hanem *az egyenletmegoldás gyakorlására* helyezzük a hangsúlyt. Viszont az *alaphalmaz* és az *igazsághalmaz* (megoldáshalmaz) fogalmát nekik is ismerniük kell. Meg kell tudniuk vizsgálni, hogy az adott érték *megoldása-e az egyenletnek*, *egyenlőtlenségnek* vagy sem.

Az egyenlőtlenségeknél hozzuk kapcsolatba a *legalább*, *legfeljebb*, *pontosan* kifejezéseket a „nagyobb vagy egyenlő”, „kisebb vagy egyenlő”, „egyenlő” relációkkal.

Egyenletek, egyenlőtlenségek algebrai megoldása

Az alfejezet feladatanyagának feldolgozásával a *mérlegelv* felelevenítését, tudatosítását, az *egyenletmegoldás gyakorlását*, az ezen a téren mutatkozó hiányosságok pótlását tűzhetjük ki célul. A tanulóktól nemcsak azt várjuk el, hogy helyesen oldják meg az egyenletet, egyenlőtlenséget, hanem azt is, hogy a lépéseket indokolni (tudatosság), a megoldást ellenőrizni is tudják.

A folyamatos ismétlés során ismételten térjünk vissza olyan egyenlőtlenségekhez, amelyek megoldásakor a két oldalt negatív számmal kell szorozni vagy osztani (1. példa). A tanulók könnyen megfeledkeznek arról, hogy ebben az esetben „meg kell változtatni az egyenlőtlenségjel irányát”.

Emelt szinten megmondhatjuk, hogy a „mérlegelv” alapján végzett lépéseket *ekvivalens átalakításoknak* nevezzük:

> az ekvivalens átalakítások során az egyenlet (vagy egyenlőtlenség) igazsághalmaza nem változik, vagyis az átalakítások során nyert újabb egyenletnek a gyöke(i) az eredeti egyenletnek is megoldása(i), és más szám(ok) nem elégíti(k) ki egyik egyenletet sem, csak ez(ek) a gyök(ök);
>
> az *azonos átalakítások* (a zárójelbontás, kiemelés, a törtek egyszerűsítése, közös nevezőre hozása, az összevonás, a szorzás elvégzése) is ekvivalens átalakítások;
>
> továbbá ha az egyenlet, egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt a kifejezést adjuk hozzá, vagy mindkét oldalból ugyanazt a kifejezést vonjuk ki, illetve ha az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nullától különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor *ekvivalens átalakítást* hajtunk végre.

Ha az egyenlet, egyenlőtlenség megoldása során minden lépésünk az eredetivel ekvivalens egyenletet, egyenlőtlenséget eredményezett, akkor elvileg nincs szükség a megoldás ellenőrzésére. (Ebben az esetben a saját munkánk helyességét ellenőrizzük.)

Ha a megoldás során volt olyan lépés, amely nem szerepel a tankönyvben felsoroltak között, akkor az ellenőrzéssel bizonyítjuk be, hogy a kapott érték valóban megoldása az egyenletnek, egyenlőtlenségnek.

Minimumszinten az egyenlőtlenség ellenőrzéséhez számegyenesen rajzoltassuk meg a megoldáshalmazt. A számológépet alkalmazva több számmal is elvégeztethetjük az ellenőrzést. Szervezhetjük úgy is a munkát, hogy az egyes tanulók különböző számokkal dolgozzanak (persze erre célszerű felkészülnünk).

Jobb csoportban az egyenlőtlenség megoldásának ellenőrzéséhez alkalmaztathatjuk az összeg, különbség, szorzat és hányados változásáról tanultakat (lásd **1.** példa).

Szöveges feladatok megoldása egyenlettel
Szöveges feladatok megoldása egyenlőtlenséggel

E két alfejezet (a 7. osztályos szintet nem meghaladó) példáival és feladatsoraival elsősorban a matematikához nehezebben kapcsolódó tanulók fejlesztését oldhatjuk meg. A hiányosságok pótlása céljából ezekre a feladatokra fordítsunk elegendő időt.

Emelt szinten az itt található néhány nehezebb feladat mellett a feladatgyűjtemény **2.8.25−28., 2.8.32.** feladatait javasoljuk.

A bevezető feladatsorok feldolgozásával (**Tk/3. 26., 27., 30., 33.**, illetve **35.**) a változók és adatok közti kapcsolatok értelmezésének és felírásának az elemeit gyakoroltathatjuk, ezzel mintegy előkészítjük az egyenletek felírását.

Az adatok közti összefüggés elemzésére mutatunk példát az **5.** példa megoldásának 2. lépésében is. A tervszerű próbálgatással kapott „túl kicsi" és „túl nagy" eredmények értékelése nemcsak az eredmény becslését szolgálja, hanem a megfelelő egyenlőtlenségek felírásával közelebb juthatunk az összefüggések felismeréséhez is (3. lépés).

Fontos a **6.** példa és a **33.** feladatsor alapos feldolgozása. Egyrészt átismételtethetjük a százalékszámítást, másrészt (emelt szinten) előkészíthetjük a „keveréses" feladatokat.

A szöveges feladatok megoldásához nélkülözhetetlen a változók közti kapcsolatok műveletekkel történő felírása. Ehhez az egyes alfejezetek bevezető feladatsorai mellett például a **Tk/3 1., 3.** és a **Fgy. 2.7.03−20.** feladatok nyújthatnak segítséget. Amíg az ilyen típusú feladatok megoldása nem problémamentes, vagy amíg gondjuk van a tanulóknak a terminológiával (összeg, különbség, szorzat, hányados, arány, legalább, legfeljebb stb.), addig a szöveges feladatok megoldása is nehézséget jelent a számukra, hiszen nem tudják a köznapi nyelvet lefordítani a matematika nyelvére. Éppen ezért a szöveges feladatok megoldatása előtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanulók rendelkeznek-e a szükséges alapismeretekkel vagy sem.

A szöveges feladatok teljes megoldásmenetét ne csak a dolgozatokban követeljük meg, hanem a közös munkában szoktassuk rá erre tanulóinkat. Az ebből származó „időveszteséget" később, a tanulók magabiztosabb munkája révén kamatostól visszakapjuk.

A szöveges feladatok ellenőrzése során gyakran elkövetik a tanulók azt a hibát, hogy az általuk felírt egyenletbe helyettesítik be az eredményt. Tudatosítsuk, hogy a szöveg alapján (nem a „szövegbe behelyettesítve") kell ellenőrizni. Hívjuk fel a figyelmüket a kidolgozott mintapéldákban olvasható ellenőrzési módokra. A kezdeti „időveszteség" (az alapos ellenőrzés sok időt vesz igénybe) a későbbiek során ebben az esetben is megtérül.

A *szöveg alapján történő ellenőrzés* egyúttal a *diszkussziót*, a szövegnek az eredmény tükrében történő újraértelmezését is jelenti. Hiszen a tanulóknak azt is vizsgálniuk kell, hogy az eredmény megfelel-e a gyakorlati életnek, illetve összhangban van-e az előre *becsült* értékkel.

A középiskola az egyenletre, egyenlőtlenségre vezető egyszerű szöveges feladatok megoldásában nagy biztonságot vár el a tanulóktól. Ezért a középiskolába készülők felkészítéséhez használjuk fel a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény 2.8.** fejezetének feladatait is, és ha lehetőségünk van rá, akkor a tanmenetben javasolt óraszámot egészítsük ki néhány gyakorlóórával.

A szöveges feladatokról tanultak kiegészítése

Csak a bővített tankönyvben található meg ez az alfejezet.

A helyiértékes írásmóddal kapcsolatos feladatok egyenlettel történő felírásában még a középiskolában is gondok vannak, ezért a matematikát nehezen tanulókkal szemben ebben a témakörben ne támasszunk túlzott követelményeket.

Az **1.** példa tárgyalása, illetve a bevezető **Tk/3. B16.** feladatsor feldolgozása előtt, szükség esetén, elevenítsük fel, hogy mit jelent a tízes számrendszerben a többjegyű számok „lineáris kombinációként” való felírása. Ezt konkrét számpéldán is mutassuk meg. Például: $74 = 7 \cdot 10 + 4$; $438 = 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8$

Konkrét számpéldán érdemes megvizsgáltatni azt is, hogy mit jelent a „számjegyek felcserélése”: $47 = 4 \cdot 10 + 7$; $834 = 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4$

Az összefüggések keresése során célszerű helyiérték-táblázatot készíttetni (**1.** példa).

Több feladat kapcsolatba hozható a kombinatorikával. Az ilyen feladatokat lehetőleg többféleképpen oldassuk meg. Gyakran előfordul, hogy könnyebb vagy egyszerűbb a megoldás például úgy, hogy az összes lehetséges esetből kiválasztjuk a feladat összefüggéseinek megfelelőt, és erre a megoldásra a gyengébbek is rátalálhatnak.

Emelt szinten a feladatgyűjtemény **2.8.33.** feladatsorát is dolgoztassuk fel.

Geometriai számításokkal kapcsolatos feladatok ismételjük át az adott alakzat tulajdonságait, a feladattal kapcsolatos összefüggéseket. A szöveg értelmezéséhez általában készíttessünk rajzos vázlatot, amelyen különböző színekkel rajzoltassuk meg és írjuk rá a megadott, illetve a keresett adatokat. A megoldás értelmezése, ellenőrzése, illetve a tanultak folyamatos gyakorlása végett szerkesztessük meg a kérdéses alakzatot. A térfogatszámítással kapcsolatosan foglalkozzunk a sűrűség, térfogat, tömeg kapcsolatával is (koncentráció a fizikával; **Tk/3. 40.** *c)* feladat).

Több feladatnál lehetőség nyílik az általánosításra. Ezeket a lehetőségeket a feladat megoldása után a diszkusszió fázisában („Mit mondhatunk még el a feladatról?”) minden esetben beszéljük meg (**Tk/3. B20.** *b)*, **B21.** *b)*, **B22.** *a)* feladat).

Az alfejezet feladatanyaga és a feladatgyűjtemény **2.8.29–31., 4.1.46.** feladatsorai tág keretet biztosítanak a témakör differenciált feldolgozására. Ezeknek a feladatoknak egy részét felhasználhatjuk a kérdéses geometriai ismeretek tárgyalása során (koncentrálás), valamint a folyamatos és az év végi ismétlés keretében is.

Fontosnak tartjuk, ha az órakeret megengedi, akkor lehetőleg minden tanuló találkozzék ilyen típusú feladatokkal. A *differenciált feldolgozás* egyik módszertani „fogása” lehet, hogy közös munkában a legfontosabb ismeretek felidézésébe a leggyengébbeket vonjuk be, de a rejtettebb összefüggések felismerését, a megoldási terv elkészítését már csak a tehetségesebb tanulóktól várjuk el. A felállított egyenletek megoldását és az ellenőrzést, az alapvető szerkesztések végrehajtását ismét megköveteljük a gyengébbektől is, míg az általánosítás és a diszkusszió során megint a jobbakra támaszkodunk.

A Fizikai számításokkal kapcsolatos feladatok című alfejezet feladatanyagának feldolgozása jól erősíti a fizikai alapismereteket. Ne ragaszkodjunk ahhoz, hogy a tanuló egyenlettel oldja meg a feladatot. Ha következtetéssel jut el a megoldáshoz, ez legalább olyan értékes, mint az egyenlet felírása és megoldása. A feladatok megválasztásánál vegyük figyelembe a tanulócsoport színvonalát és a tanulók továbbtanulási ambícióit.

Alapszinten a legfontosabb ismereteket idézzük fel a **Tk/3. B23**–**B24.; Mgy. 4.36.** feladatsorok frontális feldolgozásával. A képletcentrikusság helyett a következtetési séma tudatosítását javasoljuk. A gyengébb tanulók is eljuthatnak az általános összefüggések felismeréséhez, ha a testek viszonyát és elmozdulását jól szemléltető ábrát rajzoltatunk, esetleg modellel „lejátszatjuk” az eseményt, vagy *számítógépen szimuláljuk* a feladatban leírt mozgást. Az összetartozó adatpárokat föltétlenül foglaltassuk táblázatba, esetleg ábrázoltassuk grafikonon. Ily módon az ellenőrzés is könnyebben megvalósítható.

A mozgási feladatok legtöbbjénél az egyenes vagy a fordított arányosság, illetve a lineáris függvény fordul elő. Erre hívjuk fel a tanulók figyelmét, mintegy visszacsatolva a 6. és a 7. osztályban tanultakhoz.

Jobb csoportban a feladatválaszték bővíthető a **Tk/3. B25.; Mgy. 4.37.** feladatsorral. *Emelt szinten* összetettebb feladatok megoldását is megkövetelhetjük (**Tk/3. B26**–**B29.; Fgy. 2.8.34**–**36., 3.2.08**–**11., 3.3.14.**). E feladatok megoldatásával a tehetségesebb tanulók felkészítését alapszinten is támogathatjuk.

A többféle megoldási mód felismerését (**3.** példa) is elsősorban a tehetségesebb tanulóktól várhatjuk el. Velük az aktuális függvénytani, illetve fizikai anyagrészek (egyenletes mozgás, egyszerű gépek) feldolgozásakor is oldassunk meg ilyen feladatokat.

Keveréses feladatok közül az „egyszerű feladatok” (**5.** példa, **Tk/3. B30.** feladatsor) megoldása a tanulók többségének nem jelenthet gondot.

Nehezebbek a különböző töménységű oldatok, ötvözetek keverésével kapcsolatos feladatok, hiszen az összefüggések felírása a százalékszámítás szilárd és tudatos elsajátítását feltételezi. (Mutassunk rá a százalékszámítás gyakorlati hasznára!)

A feladatokat tipizálhatjuk aszerint, hogy mi az ismeretlen:

1. Adott mennyiségű és töménységű oldatok összekeverésekor a keverék töménységét kell meghatározni (**Tk/3. B31.** *c)*, *d)*; **Fgy. 2.8.37.** *c)*, *g)* feladat).

2. Adott mennyiségű és töménységű oldathoz ismeretlen mennyiségű, adott töménységű oldatot keverünk azzal a céllal, hogy adott töménységű oldatot kapjunk (**Tk/3. B31.** *e), f)*; **Fgy. 2.8.37.** *d)*, *i)*, *j)* feladat).

3. Ismeretlen mennyiségű, adott töménységű oldatokat keverünk össze úgy, hogy adott tömegű és töménységű oldatot kapunk (**Tk/3. B14.** *g)*; **Fgy. 2.8.37.** *e)* feladat).

Az **1.** típus nehezebb változatai lehetnek:

Adott mennyiségű és töménységű oldathoz adott mennyiségű, ismeretlen töménységű oldatot keverünk azzal a céllal, hogy adott töménységű oldatot kapjunk. Például:

50 g 20%-os alkoholhoz milyen töménységű alkoholból keverjünk hozzá 100 g-ot, ha 40%-os töménységű alkoholt szeretnénk kapni? (50%-osból.)

Adott mennyiségű és töménységű oldathoz ismeretlen töménységű oldatot keverünk azzal a céllal, hogy adott mennyiségű és töménységű oldatot kapjunk. Például:

50 g 20%-os alkoholhoz mennyi és milyen töménységű alkoholt keverjünk, ha 150 g 40%-os töménységű alkoholt akarunk előállítani? (50%-osból 100 g-ot.)

Az értelem nélkül bevésett képletek helyett itt is a következtetéssel való megoldást elevenítsük fel és helyezzük előtérbe. Szükség esetén elevenítsük fel a százalékszámításról tanultakat, s utána mutassuk meg azt, hogy a következtetési sémát hogyan alkalmazhatjuk (lásd a **6.** példa megoldásában az adatok közti összefüggés elemzését). Semmiképpen sem javasoljuk a feladatok felírásának „leegyszerűsítését” oly módon, hogy azonnal a százaléklábakkal írjuk fel a sémát (lásd a **6.** példa megoldásában az egyenlet felírása utáni második sort). Ez formalizmushoz, ezért váratlan feladathelyzetben csődhöz vezethet (**Tk/3. B34.** feladat).

Ismertessük fel az egyenlet felírásának az alapgondolatát:

az oldatok összekeverésével nem változik meg a „tiszta” anyag mennyisége;

a keverék tömege megegyezik a komponensek tömegének összegével.

Az adatoknak táblázatba foglalása ezekben a feladatokban is segítheti összefüggések áttekintését és felismerését, illetve a megoldás ellenőrzését.

Az *Együttes munkavégzéssel kapcsolatos feladatok* című alfejezetben foglalkozik a tankönyv a „medencefeltöltős” és a „munkavégzéses” feladatokkal. Ezek a matematikai műveletek szempontjából azonos típusba sorolhatók. Mindkét esetben a „teljesítményre”, azaz (a dimenziótól eltekintve) az időegység alatt végzett munkára kérdezünk rá, majd a törtrészekből következtetünk az egészre.

A 7. példa megoldásakor a tanulók zöme úgy érzi, hogy a medence térfogata is befolyásolja a megtöltés időtartamát. Feltétlenül mutassuk meg, hogy a feladat ilyen megfogalmazásában felesleges ez az adat. Vegyünk például egy 173 m^3-es medencét, írjuk fel erre az összefüggést, majd az egyenlet mindkét oldalát osszuk a medence térfogatának mérőszámával.

Fejtörő feladatok. Tudáspróba

Az itt található, nem szokványos feladatokkal színesíthetjük a témakör tárgyalását.

4. Geometriai transzformációk

Alsó tagozaton a tanulók szemléletes szinten foglalkoztak a geometriai transzformációk teljes rendszerével. Az ott kialakított szemlélet megerősítését szolgálták 6. osztályban a *Mi lehet a szabály?*, 7. osztályban az *Ismerkedés a pont-pont függvényekkel* című alfejezetek játékos feladatai. Ezekre a feladatokra támaszkodva értelmezhettük az *egybevágóságot*, majd a speciális egybevágósági transzformációkat, a *tengelyes tükrözést*, a *középpontos tükrözést*, (az egzakt fogalom kialakításának igénye nélkül) az *eltolást* és az *elforgatást* is. Gondot jelenthet, hogy 7. osztályban sem jutott kellő idő az egybevágósági transzformációkra, az ismeretek rögzítésére és begyakorlására. Ebben az esetben külön *korrepetálással* pótolhatjuk a hiányosságokat.

8. osztályban kiegészítjük, magasabb absztrakciós szinten áttekintjük és rendszerezzük az egybevágósági transzformációkról tanultakat.

Már alsó tagozatban el kellett jutnunk a hasonlóság (mint arányos kicsinyítés, nagyítás, illetve ugyanolyan méretűre történő lemásolás) fogalmához. Az egybevágóságot mint speciális hasonlóságot értelmeztük:

Hasonló két alakzat, ha ugyanolyan alakú;

egybevágó két alakzat, ha ugyanolyan alakú és méretű.

A hasonlóságról tanultakat alkalmazták a tanulók az alaprajzok, térképek, nézeti rajzok értelmezésekor nem csak a matematikaórákon, hanem a technika-, a rajz-, a környezetismeret-, majd a földrajzórákon is. Ezekre a tapasztalatokra támaszkodva ismerkedünk meg 8. osztályban a hasonlósággal, ezen belül a középpontos hasonlósággal.

A 6. és 7. osztályos tankönyv geometria fejezeteinek felépítését vizsgálva szembetűnő, hogy a kezdeti időszakban manipuláltatás, próbálkozás nyomán jutottak el a tanulók olyan felismerésekhez, sejtésekhez, amelyeket igaz állításként, tételként fogadtak el. A későbbiek folyamán – esetenként – ezekre az állításokra építve egzakt bizonyításokat is bemutatnak e tankönyvek, de még a 8. osztályos tanuló is elsősorban a szemléletére támaszkodva, induktív úton jut el a geometriai fogalmakhoz. A 8. osztályban (a középiskola felé haladva) szükségessé válik annak a felismertetése, hogy vannak olyan igaz megállapítások, amelyek nem bizonyíthatók, vagy amelyeket nem bizonyítunk, s ezekre építve bizonyítunk be tartalmasabb, összetettebb jellegű igaz állításokat.

Itt jegyezzük meg, hogy e bizonyítások mindegyikének feldolgoztatását és számonkérését nem javasoljuk: az osztály összetételétől, beállítottságától, valamint a tanári módszertől függően szelektáljunk, de *a tanulók mindenképpen lássanak olyan bizonyítást, amely nemcsak szemlélet alapján bizonyul igaznak*.

A geometria axiomatikus felépítései közül az *euklideszi* a legismertebb a szaktanárok körében. Ennek ismertetése még a nyolcosztályos gimnáziumban sem történt meg teljes részletességgel. Ma sem javasolható ez a felépítés:

Az euklideszi tárgyalásmód, felfogás *statikus*, a mai geometriai szemlélet a dinamikust, a *mozgáson alapulót* részesíti előnyben.

A tanulók többségének érdeklődése, képessége, gondolkozásának fejlettsége nem felel meg az axiomatikus tárgyalásnak.

Az axiomatikus felépítésre nincs elegendő idő.

A fejezet *alapszintű* és *emelt szintű* feldolgozásának tartalma, mélysége és szemlélete között lényeges különbségek lehetnek. Ennek a különbségnek nemcsak a tanulók eltérő tudása és képessége lehet az oka. Az iskola helyi tantervének figyelembevételével dönthetünk, hogy a kötelezően előírt minimumot milyen absztrakciós szinten dolgozzuk fel, milyen anyagrészekkel bővítjük ki, mennyire térünk ki a részletekre és a különböző anyagrészek közti összefüggésekre. Az előzőekben leírtaknak megfelelően nem célszerű egyértelműen rögzíteni a tananyag-feldolgozás csomópontjait. A különböző tananyag-felépítések más-más „csomópontok” köré szerveződhetnek.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Halmazelméleti alapismeretek: halmaz, elem, eleme, alaphalmaz, üres halmaz (**Tk/4. 8.** *a)*, **11., B62.**). Állítások logikai értékének, következtetések helyességének eldöntése. A tétel megfordításának fogalma (bővített tankönyv 222. oldal).

Számtan, algebra

Műveletek racionális számokkal, négyzetre emelés, négyzetgyökvonás; a számológép használatának gyakorlása. Az *arány* fogalma, *arányossági következtetések*. Egyszerű szöveges feladatok. Algebrai kifejezések helyettesítési értékének meghatározása. Egyenletek megoldása.

Relációk, függvények

A geometriai transzformáció mint függvény. A derékszögű koordináta-rendszer (**Tk/4. 1., 2., 14., B13. B14., B19., 26., 27., B57.**).

A geometria egyéb témakörei

A fejezet színvonalas feldolgozásához szükséges az eddig tanult teljes geometria tananyagot mozgósítanunk. A korábban tanultak folyamatos ismétlését úgy tervezzük meg, hogy készítse elő az új ismeretek, összefüggések, eljárások „felfedezését”, bizonyítását, alkalmazását.

A feladatok helyes megválasztásával előkészítjük később tanulandó ismeretek (például vektorműveletek, analitikus geometriai és trigonometriai ismeretek) befogadását is.

Kombinatorika

Az összes megoldás felkutatása (például **Tk/4. 64.** feladat).

Társtantárgyak

Fizika: fénytani ismeretek; elmozdulás, sebesség mint vektor.

Földrajz: térképészet.

Technika: műszaki rajzok értelmezése.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Az egybevágóságról tanultak áttekintése, kiegészítése

Az egybevágósági transzformációk áttekintéséhez, valamint a hasonlóság feldolgozásához, a fogalomrendszer kiépítéséhez fel kell elevenítenünk a *geometriai transzformációkról* mint *pont-pont függvényekről,* az *egybevágóságról*, a *háromszögek egybevágóságának alapeseteiről*, a *tengelyes tükrözésről, tengelyes szimmetriáról,* valamint a *középpontos tükrözésről, középpontos szimmetriáról*, és esetleg az *eltolásról* korábban tanultakat. Emiatt néhány órát célszerű erre az anyagrészre fordítanunk.

A *feladatsorok feldolgozása közben* értelmezzék a tanulók a geometriai transzformáció, az egybevágósági transzformáció és az egybevágóság fogalmát, ismételjék át a szerkesztési eljárásokat, illetve az egyes transzformációk tulajdonságait.

Az egybevágóság és a távolságtartás szorosan összetartoznak:

minden mozgás egybevágóság, a tengelyes tükrözés nem síkmozgás;

az egybevágóság mint geometriai transzformáció távolságtartó.

Az utóbbi megállapítást fel lehet fogni úgy, mint szemléleten alapuló axiómát. Ez esetben is szükséges viszont szemlélet alapján (axiómaként) elfogadni azt, hogy a mozgás

két pontot összekötő szakaszt a két elmozgatott pont összekötő szakaszába viszi;

egyenest egyenesbe visz át.

Két szög egyenlőségét is célszerű meghatározni: két szög akkor egyenlő, ha egybevágósági transzformációval fedésbe hozhatók egymással.

A háromszögek, négyszögek, általában a sokszögek szerkesztése, egybevágóságának bizonyítása esetében hasznos, ha a feladatok megoldása közben utalunk arra, hogy

két alakzat egybevágó, ha kölcsönösen fedésbe hozható,

a sokszöget egybevágósági transzformáció szempontjából a csúcsai jól meghatározzák, elegendő tehát ezek képét előállítani.

Eltolás

A tanulók már korábban is találkoztak eltolással, például parkettázások vagy derékszögű koordináta-rendszerben végzett transzformációk során (**Tk/4. 1.** *d)* feladat). Esetleg a helyi tanterv alapján 7. osztályban pontosítottuk, tudatosítottuk a korábbi megfigyeléseket. Ennek ellenére 8. osztályban célszerű legalább két órát fordítanunk a tanultak felelevenítésére, elmélyítésére.

Az eltolás tanításának módszertani vonatkozásaival a 7. osztályos program részletesen foglalkozik.

Az eltolás tulajdonságainak alkalmazása című alfejezet (bővített tankönyv 198–201. oldal) feladatait még emelt szinten is differenciált foglalkozás keretében javasoljuk megoldatni. A kidolgozott mintapéldák feldolgozása során ismertessük fel, hogy a párhuzamos egyenesek közé zárt egymással párhuzamos szakaszok egyenlő hosszúak.

Forgatás, forgásszimmetria

Annak ellenére, hogy a korábbi években a tanulók sokszor oldottak meg forgatással kapcsolatos szemléletformáló, játékos feladatokat, számukra ez a transzformáció még 8. osztályban is nehezen átlátható. Ennek az az oka, hogy a forgatás a szemlélet és a fogalmak szempontjából (a távolság fogalma mellett megjelenik az irányított elfordulás fogalma) is összetettebb, mint például a tengelyes tükrözés vagy az eltolás. A forgatás átlátszó papírral vagy írásvetítő fóliával történő modellezésére még azoknak a tanulóknak is szükségük lehet, akik a többi transzformációval könnyen boldogulnak.

Az előzőek miatt *alapszinten* csupán „bemutatjuk” ezt a transzformációt, és *emelt szinten* sem foglalkozunk vele részletesen. A forgatás alkalmazása különböző szerkesztési és bizonyítási feladatokban a középiskola feladata.

Az óra számlapja és mutatóinak mozgása alkalmas a különböző nagyságú (360°-nál nagyobb is lehet) és irányú elfordulások bemutatására.

Az **5.** mintapéldát a következőképpen dolgoztathatjuk fel:

A megrajzolt vagy megszerkesztett alakzatra *pauszpapírt* helyezünk, és a rá átmásolt alakzatot elforgatjuk az előírt módon. Felismertetjük, hogy az egyenes szakasz, illetve az egyenes képét két elforgatott pontja egyértelműen meghatározza. Ezért például a sokszögek esetében elegendő a csúcsok elforgatott képét megadni. A forgatás modellezése és a forgatás tulajdonságainak tudatosítása után a tanulók már könnyen megszerkesztik az adott pontok elforgatott képét, s így az elforgatott alakzatot.

A tanulók ismerjék fel, hogy a tengelyes szimmetria mellett létezik forgásszimmetria (és a forgásszimmetria speciális eseteként középpontos szimmetria) is.

Az *Összefoglalás* című alfejezetben tömören és áttekinthetően összefoglaljuk az egybevágósági transzformációkról tanultakat. Külön kiemeljük az *identitást* mint *nullvektorral* történő eltolást, illetve mint a 360° többszörösével történő elforgatást.

Jobb csoportban fokozatosan előtérbe kerülhet a geometria deduktív tárgyalása, ezért a *Számítási és bizonyítási feladatok* című alfejezetben (bővített tankönyv 207–208. oldal bemutatjuk a háromszög középvonalával kapcsolatos tétel bizonyítását. A bizonyítás egyes részleteit, illetve a bizonyítás teljes egészét jobb képességű tanulóinkkal önálló munkában felfedeztethetjük.

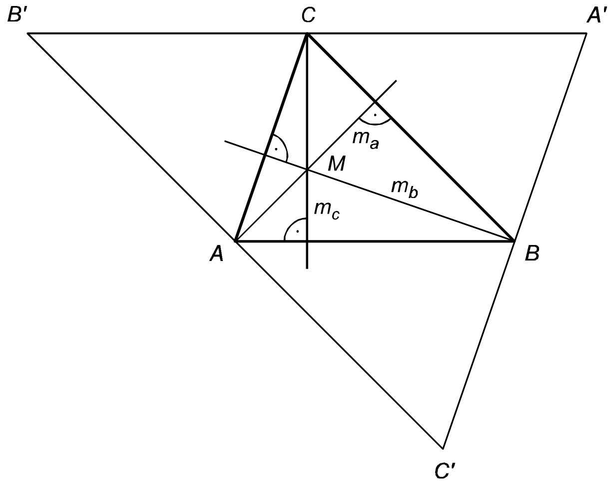
Korábban, a 2. fejezetben foglalkoztunk a háromszög magasságvonalaival. Bizonyítás nélkül közöltük, hogy a magasságvonalak egy pontban metszik egymást. *Érdeklődő tanulóink számára* most bizonyíthatjuk ezt a tételt.

A tétel kimondása és bizonyítása előtt elevenítsük fel a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontjával kapcsolatos tételt, és a háromszög magasságvonaláról tanultakat.

Tétel

Bármely háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög magasságpontja.

Bizonyítás



Tükrözzük az *ABC*△ csúcsait a szemközti oldalak felezőpontjára, kapjuk az *A'*, *B'*, *C'* pontot. A középpontos tükrözésekből következően: *AB* szakasz párhuzamos és egyenlő hosszúságú az *A'C* szakasszal és a *CB'* szakasszal is. De az *AB* szakasszal a *C* ponton át csak egy párhuzamos egyenes húzható, ezért az *A'* pont a *C* pont és a *B'* pont egy egyenesen van, és a *C* az *A'B'* oldal felezőpontja.

Ebből következik, hogy az *ABC*△ *C* csúcsához tartozó magasságvonala az *A'B'* oldalnak felezőmerőlegese.

Hasonlót állíthatunk az *ABC*△ másik két magasságvonaláról is.

Mivel az *A'B'C'*△ oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ezért *ABC*△ magasságvonalaira is ez igaz. Ezt kellett bizonyítanunk.

Ezeknek a problémáknak a megoldása előkészíti a hasonlóság, azon belül a háromszögek hasonlósága és a középpontos hasonlóság tárgyalását.

A hasonlóság fogalma

A Kerettanterv a hasonlóság fogalmának kialakítását, a háromszögek hasonlóságának vizsgálatát, a hasonlóság elméleti és gyakorlati jellegű alkalmazásait csak a 10. évfolyam végén írja elő. Ugyanakkor a középpontos hasonlóság tanítását 8. osztályban megköveteli.

A hasonlósági transzformáció a fenti megközelítésben egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció szorzata. Ennek a középiskolai szemléletmódra jellemző felépítésnek nincs meg sem a matematikai, sem a tanuláslélektani háttere. Egyrészt nem tanítottuk a transzformációk szorzatát, másrészt a fogalom kialakításának ez a deduktív útja olyan érett matematikai látásmódot feltételez, amellyel a tanulók döntő hányada még nem rendelkezik.

Az előzőekben bemutatott sorrend a tantervi építkezés szempontjából is erősen kifogásolható. Alsó tagozatban tapasztalati szinten kialakítjuk a hasonló síkidomok mint „ugyanolyan alakú formák” fogalmát. A tanulók felismerik, hogy két forma akkor „ugyanolyan alakú”, ha az egyik a másiknak nagyított vagy kicsinyített vagy ugyanolyan méretűre lemásolt képe. Erre a matematikai alapozásra épít 3. osztálytól kezdve a technika (nézeti rajzok), a természetismeret, majd a földrajz (térképek olvasása). A 8. osztályos geometriai fogalomalkotás során sem hagyhatjuk figyelmen kívül a korábbi szemléleti alapozást.

Ha az eddig követett koncepcióhoz – mérés, összehasonlítás alapján új ismereteket szerezni, új fogalmakat alkotni, értelmes meghatározásokat adni – hűek akarunk maradni, akkor a hasonlóság fogalmát sem a meghatározás közlésével, hanem annak mérés alapján, tapasztalatszerzés nyomán való értelemszerű megfogalmazásával alakítjuk ki. Az **1.** példa és a **Tk/4. 17.** feladat ennek az elvnek a megvalósítására alkalmas.

A bevezető gondolatsor, valamint az **1.** példa mégsem a számszerűség felől közelít. A hasonlóság szót ugyanis nemcsak geometriai, hanem köznapi értelemben is használjuk. Az alakzatokról készíthető kép, modell, térkép említésével, a nagyításra, kicsinyítésre utalással erre a köznapi hasonlóságra is felhívjuk a tanulók figyelmét.

Az alakzatok hasonlósága eredetileg egy képzet: a látás segítségével alakul ki az emberben a *hasonlóság érzete*. Ez egyénenként más-más tartalmat takar, ezért a matematikában értelmeznünk kell ezt a fogalmat.

Az **1.** példa feldolgozása során a hasonlósági érzetre alapozunk, miközben előkészítjük az értelmezést. A nyilvánvaló hasonlóság felismerése [(1), (2)] után a nyilvánvalóan nem hasonló (3) eset következik. A (4) és az (5) a szögek vizsgálata alapján ad további értékes információt. A (6) előkészíti a (7)-re adandó helyes választ.

A példa alapján nyilvánvaló, hogy a matematikai hasonlóság meghatározásában a megfelelő szögek egyenlősége, valamint a megfelelő szakaszok arányának állandósága döntő szerepet játszik. E két paramétert kell figyelemmel kísérni: a **Tk/4. 17–19.** feladat megoldásakor, valamint a **3.** példa feldolgozása során (bővített tankönyv 216. oldal). A további feladatokat úgy válasszuk meg, hogy azok alkalmasak legyenek a kicsinyített vagy nagyított kép vizuális megítélésére is.

Néhány számolást is igénylő feladat (**Tk/4. 18–19.**) megoldatása után megfogalmaztathatjuk a hasonlóság definícióját, mert az előkészítést mind a szemlélet, mind a számolás terén elvégeztük.

A **2.** mintapélda és a **Tk/4. 22–23.** feladat megoldásakor hívjuk fel a tanulók figyelmét a hasonlóság gyakorlati alkalmazásaira.

Külön szólunk a k arányossági tényezőről. Bizonyára feltűnik a kollégáknak, hogy $k < 1$ esetén nem kötöttük ki k pozitív voltát. Ugyanis az adott előkészítés mellett fel sem merülhet, hogy k negatív is lehet. Ha valamelyik gyermek mégis megkérdezi, hogy $k < 0$ lehetséges-e, akkor azt válaszoljuk, hogy az adott felfogásban ez nem lehetséges, de a későbbiek folyamán úgy általánosítunk, hogy ez lehetségessé váljon.

A hasonlóság értelmezéséhez, a számítások elvégzéséhez szükség van az arány fogalmára. Ennek felidézésére már a tankönyv 1. fejezetében sor került, de a fogalom használhatóságát itt is ellenőrizzük. Fontos követelmény, hogy az arány alapján a tanulók meg tudják állapítani, hogy nagyításról vagy kicsinyítésről van-e szó.

A hasonlóság alkalmazása című részben alakzatok hasonlóságán alapuló számítási feladatokkal foglalkozunk. Az előző alfejezetben is voltak ilyen feladatok (**Tk/4. 18–19.**). Itt a bevezető feladatok között találunk számítási feladatokat (**Tk/4. B20–B23.**). Ezekben adottak egy alakzat oldalhosszai és a hozzá hasonló alakzat egyik oldalának hossza. Ebből kellett meghatározni a hasonló alakzat ismeretlen oldalhosszait. A **3.** és a **4.** példa, valamint az azokat követő feladatok többsége összetettebb az említett feladatoknál, ezek elsősorban a középiskolába készülőknek szólnak.

Háromszögek hasonlósága

Kiegészítő anyagrész, bővített tankönyv 219–227. oldal.

A **Tk/4. B25–B28.** feladat megoldatása elmélyíti a hasonlóság fogalmát és a hasonló háromszögekkel kapcsolatban tételek megsejtését segítheti elő. A **B26.** feladat megoldásmenete ezenkívül módszert is ad a következő rész feldolgozásához, az **1.** és a **2.** példában megfogalmazott állítások bizonyításához.

A **Tk/4. B29–B33.** feladat a háromszögek hasonlóságának alapeseteivel kapcsolatos, azok megértését segíti és ellenőrzi.

A háromszögek hasonlósága alapeseteinek áttekinthető és színvonalas tárgyalásához szükség lenne a párhuzamos szelők tételének és a tétel megfordításának ismeretére.

Az **1.** példában alkalmazunk olyan bizonyítási eljárást, amelyet a párhuzamos szelők tétele bizonyításánál is felhasználhatunk.

Igen fontos az egybevágóság és a hasonlóság alapeseteinek összehasonlíttatása.

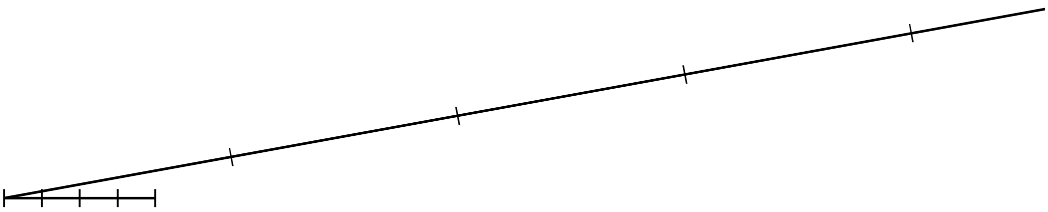
Átlagos vagy annál gyengébb tanulócsoportban értelmetlen maximalizmus lenne a fejezetet teljes mélységében tárgyalni a tanórán (a tehetséges tanulókkal ez esetben külön kell foglalkoznunk). Ha a **Tk/4. B25–B28.** feladatsort megoldatjuk, akkor elegendő ismeretet adtunk a tanulóknak a tételek megértéséhez, valamint a hasonlóság szögtartó tulajdonságának felismeréséhez. Feltétlenül rá kell világítani arra, hogy a 221. oldal alján lévő **E** és **F** állítások megfordítása nem igaz. Ezt ellenpéldával bizonyíthatjuk.

A háromszögek hasonlóságának kérdését ezzel a fejezettel nem zárjuk le. Mód nyílik a felelevenítésre, elmélyítésre a *Középpontos hasonlóság* című fejezetnél is.

A **3.** példa gyakorlati jellegű, összekapcsolja a matematikát a földrajzi és a sportbeli ismeretekkel. Matematikai szempontból sem teljesen szokványos, mert adott oldalhosszak és méretarány mellett a hasonló alakzat kerületét kell meghatározni. Ha ilyen típusú feladatot óhajtunk még kidolgoztatni, házi feladatként adni, akkor – a kissé unalmas ismétlést elkerülve – a térképen mért távolságok mellett nem a méretarányt adjuk meg, hanem például a háromszögrepülés teljes távját, s ezen adatokból kell a városok egymástól mért tényleges távolságát meghatározni.

A szakaszok felosztását bemutató **4.** példát és a **B40.** feladatot érdemes feldolgoztatnunk, mert ezt a szerkesztési technikát a gyakorlatban is alkalmazhatják a tanulók, emellett a már említett párhuzamos szelők tételével is kapcsolatba hozható.

Felvethetjük a szerkesztés pontosságának kérdését. Például nem előnyös, ha a félegyenesre az *AB* szakasz hosszának a többszörösét mérjük föl, és ugyanakkor az *AB* szakasz kicsiny szöget zár be a félegyenessel.



A feladatok – gyakorló jellegük mellett – egyéb, szintén fontos kívánalmak megvalósítására is alkalmasak:

a „pozitív egész mérőszám” kívánalom mind a „van megoldás?”, „hány megoldás van?”, mind az oszthatóság kérdéskör szempontjából jelentős (**Tk/4. B41.**);

a „megfelelő” mást jelenthet, mint az „egyik”, a „legrövidebb” stb. (**Tk/4. B56**–**B57.**);

ugyanaz a tény, feltétel többféleképpen is megfogalmazható, ekvivalens feltétel található például a **B37.** *c)* és a **B38** *c)* feladatban;

a számításos feladatok mellett olyanok is vannak, ahol dönteni kell (például **B39.**).

Emelt szinten, nagyon jó csoportban esetleg foglalkozhatunk *a háromszögek súlyvonalaira,* illetve *súlypontjára* vonatkozó tételek bizonyításával is. Ezek nem találhatók meg a tankönyv emelt szintű változatában sem, ezért itt közöljük őket.

Tétel

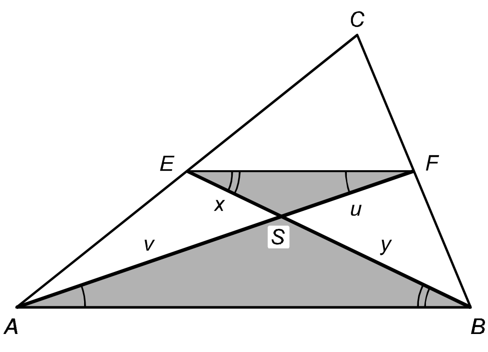
A háromszög két súlyvonala harmadolja egymást. Az egyharmad rész az oldal felé, a kétharmad rész a csúcs felé esik.

Bizonyítás

Húzzuk meg az *ABC*△ *AF* és *BE* súlyvonalát, valamint az *EF* középvonalat. A súlyvonalak metszéspontját jelölje *S*.

Az emelt szintű tankönyv 207. oldalán bizonyítottuk, hogy a háromszög *EF* középvonala párhuzamos az *AB* oldallal, és feleakkora hosszú.

$EF \parallel AB; \quad EF = \frac{1}{2} AB$



Ebből következik, hogy az ábrán egyformán jelölt szögek egyenlők, mert váltószögek.

Az $ABS\triangle$ és az $FES\triangle$ hasonló. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, így a megfelelő oldalak aránya is ennyi:

$$\frac{u}{v} = \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyezzük, hogy az előző tételt a középpontos hasonlóság (lásd később) alkalmazásával is bizonyíthatjuk.

Az előző tétel közvetlen következménye, hogy a háromszög súlyvonalainak harmadoló pontjai egy pontba esnek, vagyis a súlyvonalak egy pontban metszik egymást. Ez a pont *a háromszög súlypontja*.

Hasonló síkidomok területének aránya
Hasonló testek térfogatának aránya

Bővített tankönyv 227–230. oldal.

Az alfejezetekben található megállapítások a törzsanyagon túlmutatnak, mégis érdemes a kérdéskörrel (a csoport színvonalának megfelelő differenciálással) foglalkoznunk.

Már előzőleg, a **2.** fejezetben, a felszín- és térfogatszámítás ismertetésekor úgy választhatjuk meg a feladatok egy részét, hogy az adatok (hosszúság, szélesség, magasság) változtatása nyomán a felszín és a térfogat változásainak törvényszerűségeire is rá lehessen mutatni (**Tk/2. 59., 65., 69., 72., 78.** *c)*, **B42.** feladat). Újat itt már csak a síkbeli, illetve a térbeli hasonlóság beiktatása jelent.

A **Tk/4. B42.** feladat alkalmas annak megláttatására, hogy „a négyzetes változás erősebb, mint a lineáris” megállapítás nem jelenti feltétlenül azt, hogy az erősség növekedésben nyilvánul meg. (Nem „vezetünk be” új fogalmat, hanem a számítások eredményeit elemezve „tapasztalják” ezt a tanulók.)

A **Tk/4. B43.** és a **B47.** feladat megoldatását feltétlenül javasoljuk, de ne tekintsük ezeket csupán mértékegység-átváltási gyakorlásnak! Mindkét esetben mutassunk rá arra, hogy az 1 mm oldalú négyzethez az 1 cm, 1 m oldalú négyzet hasonló. Ugyanez mondható az 1 mm élű és az 1 cm, 1 dm, 1 m élű kocka esetében is (utóbbinál a hasonlóság térbeli).

A **Tk/4. B43–B45.** feladatsorokkal alapvető ismereteket is gyakoroltathatunk, ezért ezek feldolgoztatása akkor is hasznos lehet, ha az általános összefüggéseket nem kívánjuk megtanítani. Vizsgáltassuk meg a *hasonló síkidomok kerületének arányát* is kizárva ezzel a hibás analógiát.

Felhívjuk a figyelme arra, hogy a **Tk/4. B42., B46.** és a **Tk/6. 10.** feladathoz hasonló feladatok sokszor előfordulnak a különböző központi felméréseken, illetve a középiskolai felvételi vizsgákon.

Középpontos hasonlóság

Úgy gondoljuk, hogy a középpontos hasonlóság olyan anyagrész, amelynek általános iskolai ismertetése határhelyzetet jelent. Meggondolandó, hogy a konkrét tanulócsoport esetén milyen színvonalon és milyen mélységben dolgozhatjuk fel.

A feldolgozás mellett komoly indokok szólnak:

a kerettanterv is előírja;

a teljességre való törekvés, vagyis olyan *pont-pont transzformáció* bemutatása, amely viszonylag egyszerű, köznapi értelemben (például fizikában a lencsék képszerkesztése során) is használatos, de nem egybevágóság;

az életkornak megfelelő induktív tárgyalásmóddal szemléletileg megalapozható a későbbi (középiskolai) deduktív tárgyalás;

a középiskolában az összefüggések feltárásával és nem a szerkesztés végrehajtásának technikai kérdéseivel kívánnak foglalkozni, ez utóbbi inkább megfelel az általános iskolai feldolgozásmódnak és a gyerekek életkori sajátosságainak;

a fejlett országokban, és a mi korábbi tanterveink szerint is (különböző színvonalon) általában ennek a korosztálynak tanítják (tanították) ezt a témakört.

Fontosnak tartjuk, hogy a középpontos nagyítás és kicsinyítés szemléletes fogalmát és a végrehajtás módját – mint technikai eszközt – minden tanuló sajátítsa el.

A deduktív utat – amely tudományos, de általános iskolában nem kívánatos – úgy kerüljük el, hogy a mindennapok tapasztalataiból, illetve kísérletekből, megfigyelésekből (**Tk/4. 25**–**26.** feladat, **1.**, **2.** példa) kiindulva „fedeztetjük föl" a középpontos hasonlóságot, illetve figyeltetjük meg a *középpontosan hasonló kép megszerkesztésének* módját. A fogalom megszilárdításához bő feladatanyagból válogathatunk (**Tk/4. 27**–**28.; Mgy. 8.82**–**8.98.**).

A tanulónak újat jelent a középpontos hasonlóság meghatározásában az, hogy a k arányossági tényező nemcsak pozitív, hanem negatív valós szám is lehet. A gondolatot és az érvet ehhez a kiterjesztéshez az adja, hogy a vetítés O centrumából kiindulva az OP egyenesre kétféle irányban mérhetjük föl az OP' szakaszt. Adott abszolútértékű arányossági tényező mellett, a két irányított szakasz, vagyis a két vektor egymásnak ellentettje. Másrészt megfigyeltetjük, hogy amikor egy adott alakzat nagyított vagy kicsinyített képét kell megszerkeszteni olyan további feltétel mellett, hogy az eredeti alakzat AB szakaszának megfelelő, vele párhuzamos szakasz adott, akkor a középpontos hasonlóság alapján általában két ilyen vetítési középpont létezik. Nem mondhatjuk azt, hogy ezek közül az ún. *külső hasonlósági pont* a lényeges (legfeljebb azt mondhatjuk, hogy az a szembetűnőbb, a megszokottabb).

A **3.** példa a *gyakorlati életben* közvetlenül és közvetetten alkalmazott magasság- és távolságmérési eljárást ismerteti. A hozzá tartozó feladatok (**Tk/4. 29.; Fgy. 4.2.32.**) között jó néhány olyan akad, amelynek alapján a tanulók maguk is végezhetnek mérést és számítást.

Felvethetjük a tanulóknak a következő problémákat (a szerkesztést el is lehet végeztetni, a gyakorlatilag végrehajthatatlan esetet felvázoltathatjuk):

1. Adott egy alakzat és az alakzat a szakaszának a' képe úgy, hogy $a = a'$ és $a \parallel a'$. Az alakzat képét középpontos hasonlóság alapján kívánjuk megszerkeszteni.

   Mivel $a = a'$, a régi értelmezés szerint $k = 1$ lenne az arány. A szerkesztést azonban középpontos hasonlóság alapján, O pontból való vetítéssel nem tudjuk elvégezni. Viszont ha az adott értelmezés mellett $k = -1$, akkor létezik olyan O pont, amelyre nézve a transzformáció végrehajtható.
2. Ha egy alakzat tetszőleges a szakaszának olyan a' szakasz a képe, amelyre nézve $a \parallel a'$, az a szakasz tartóegyenese az a' tartóegyenesétől például 20 cm-re van, és $1{,}01a = a'$, akkor a nagyított képet (elvileg) elő lehet állítani külső hasonlósági pont segítségével, de a szerkesztés technikailag megvalósíthatatlan. Belső hasonlósági pont segítségével a szerkesztés viszont kényelmesen elvégezhető.

A középpontos hasonlóságról tanultak kiegészítése című alfejezetben definiáljuk a középpontos hasonlóság fogalmát.

A *definíció* megfogalmazását és értelmezését, a középpontos hasonlóság tulajdonságainak biztos ismeretét inkább csak *emelt szinten* követeljük meg. Vitatható, hogy a vektor fogalmára építve fogalmazzuk-e meg a középpontos hasonlóság definícióját. Mint már korábban is jeleztük, megelégedhetünk a szemléletes fogalom kialakításával. Viszont ha eljutunk a definíció kimondásához, akkor célszerű a tankönyvben adottat elfogadnunk, mert

a középiskolában ezzel találkozik a tanuló;

a vektorfogalom alkalmazása nélkül nagyon nehézkes a definíció megfogalmazása;

előkészíti a vektorok skalárral való szorzásának tanítását.

A középpontos hasonlóságról tanultak alkalmazása című alfejezetben levő példák és az összetett feladatok feldolgozását szintén csak *jobb képességű csoportban* javasoljuk.

Az **5.** példa megoldásmódjának ismeretében változatos tartalmú, a találékonyságot és *kreativitást* nagymértékben fejlesztő problémák sorát lehet megoldani ugyanazzal a technikai ismerettel.

A **6.** példa feldolgozása nemcsak azért hasznos, mert a tanultakat problémahelyzetben kell alkalmazni, hanem azért is, mert új összefüggéseket figyelhetnek meg a tanulók a megoldása során.

Gyakorló- és fejtörő feladatok

Képességfejlesztést, tehetséggondozást segítő feladatgyűjtemény.

Tudáspróba

A feladatsor megoldása felkészítheti tanulóinkat az 5. (témazáró) felmérésre. Külön kiemeljük a gyakorlati alkalmazás szempontjából fontos **30/5.** és **30/7.** feladatokat.

5. Relációk, függvények, sorozatok

A bevezető részben a konkrét osztálynak megfelelő tanítási program kialakításához kívánunk ajánlásokat nyújtani. A szakmai kérdésekkel a tananyag-feldolgozás áttekintésekor foglalkozunk. A nyolcadik osztályos tananyagból ennek a témakörnek a feldolgozása függ leginkább a tanuló, illetve tanulócsoport képességeitől, továbbtanulási irányultságától. Ezért a tankönyv sem a feldolgozás terjedelmében, sem mélységében, sem az anyagrészek kiválasztásában nem alkalmazkodhatott egyformán minden csoporthoz.

Alapszint

A *függvényt* alapfogalomnak tekintjük, nem helyezünk súlyt a függvény definíciójának megtanítására, a (többé-kevésbé) egzakt függvényfogalom kialakítására. A társtantárgyak, illetve a szakmai képzés szempontjából elegendő, ha a tanuló képes *a változó mennyiségek közti kapcsolatot* (ezen belül elsősorban a lineáris kapcsolatot) értelmezni, elemezni, tud *grafikont* (mozgásgrafikont is) olvasni, táblázat segítségével megrajzolni. Ezért ezen a szinten nem kívánjuk kibővíteni a korábban tanultakat, csupán azok *átismétlésére* és megszilárdítására törekszünk.

A *függvénytranszformációval* külön nem foglalkozunk. A lineáris függvényről tanultak elmélyítése céljából, a tudatosítás igénye nélkül alkalmazzuk a legegyszerűbb transzformációkat (**Tk/5. 4–5.** feladat).

Értelmezzük az $x \mapsto |x|$; az $x \mapsto x^2$; az $x \mapsto \sqrt{x}$ és az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt.

A *sorozattal* korábban úgy találkozott a tanuló, mint valamilyen szabály szerint egymást követő elemek összességével. Ebben a felfogásban a sorozatokat olyan eszköznek tekintettük, amellyel változatos feladathelyzetekben fejleszthettük tanulóink *aritmetikai-algebrai eszköztudását* és *problémamegoldó képességét*. Megelégedtünk a szabállyal adott sorozat néhány elemének meghatározásával, illetve sorozatok néhány lehetséges szabályának felírásával. Ebben a felfogásban a sorozat nem a függvények témakörhöz, hanem a számtan-algebra anyagrészhez kapcsolódott. *Gyenge csoportban* nem lépünk tovább. *Átlagos képességű csoportban* viszont megbeszélhetjük, hogyan kapcsolódik ez a fogalom a függvény fogalmához.

A *számtani* és *mértani sorozatokkal* mint konkrét, érdekes sorozatokkal foglalkozhatunk.

Emelt szint

A bővített tankönyv kiegészítő fejezeteire támaszkodva az alapszintet többféle irányban (és a csoport színvonalának megfelelő mélységben) bővíthetjük.

Alapos előkészítés (például az **1–4.** példa és a **Tk/5. 1–2., B1–B3.** feladat feldolgozása) után megköveteljük a definíciók és jelölések elsajátítását.

A fizikában tanultakkal koncentrálva mélyebben foglalkozunk az *idő-út grafikonokkal*.

Konkrét példákhoz kapcsolódva (a tanulócsoportnak megfelelő szinten, a teljesség és általánosítás igénye nélkül) foglalkozunk a *függvények transzformációval*.

Értelmezzük a *számtani és mértani sorozatot*. Konkrét feladatokban meghatároztatjuk e sorozatok valahányadik elemét, esetleg a sorozat első valahány elemének az összegét. (Csak a kiemelkedő képességű tanulóktól várható el ennél összetettebb feladat megoldása.) Az *általános összefüggéseket*, azok levezetését és alkalmazását még a jobbaknak is csak akkor tanítsuk meg, ha aktuális nevelési célként a deduktív gondolkodás fejlesztését tűztük magunk elé. Indok lehet az is, hogy ha ez a témakör a gimnáziumban az alsó (az általános iskolai képzéssel párhuzamos) évfolyamok tananyagává válik.

Tudatosítsuk, hogy a néhány elemével adott sorozat végtelen sokféleképpen folytatható, vagyis elvileg végtelen sok olyan szabályt találhatunk, amely értelmezi a sorozatot. Igen jól fejleszti a tanulók rugalmas gondolkodását, ötletgazdagságát, problémaérzékenységét, ha azt a feladatot kapják, hogy minél több különböző szabályt kell keresni az adott elemekhez.

Megjegyzés: Ha nem kívánunk foglalkozni a függvények transzformációval és a számtan-algebra tananyagot a korábbi években megfelelően elsajátították a tanulók (vagyis az év eleji ismétlést összefogottabban tárgyalhatjuk), akkor ennek a fejezetnek az anyagát beépíthetjük az 1., illetve a 3. fejezetbe például a következő módon:

A *relációkat, függvényeket* a halmazokról tanultak áttekintése után ismételjük át.

> A műveletek gyakorlása során vagy az algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámításához kapcsolódva pótoltatjuk szabállyal adott függvények táblázatának hiányzó adatait, illetve táblázattal adott függvényekhez kerestetünk szabályt, szabályokat (**Mgy. 2.42., 3.09−3.10., 3.14−3.16.**)
>
> *Konkrét sorozatok vizsgálatával* az egész számokkal, törtekkel stb. végzett műveletek gyakorlásához kapcsolódhatunk. Például a *mértani sorozatokat* feldolgozhatjuk a *Hatványozás* című fejezetben.
>
> *Képlettel adott sorozat* elemeinek felírásával foglalkozhatunk az *algebrai kifejezések helyettesítési értékének* alkalmazásaként.
>
> A számok négyzetének, illetve négyzetgyökének tárgyalását kiegészíthetjük az $x \mapsto x^2$, illetve $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény vizsgálatával.
>
> A *lineáris függvényeket*, *az egyenes* és a *fordított arányosságot* az *Arány, arányosság, százalékszámítás* című alfejezetbe dolgozhatjuk be. (Ehhez esetleg kapcsolódhat az 1. fejezet statisztikai számítások témakörének tárgyalása is.)
>
> Az *egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldását* összeköthetjük a 3. fejezetben az egyenletekről, egyenlőtlenségekről tanultak összefoglalásával.
>
> A *mozgásgrafikonokat* elemezhetjük a mozgással kapcsolatos szöveges egyenletek tárgyalásával párhuzamosan is (3. fejezet).

Ugyanakkor az év végi feldolgozásnak az az előnye, hogy például az előzőekben felsorolt kapcsolatokat kiaknázva az 5. fejezet tárgyalása során átismételhetjük az 1. és a 3. fejezet tananyagát.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

A következőkben a tankönyvre építhető legbővebb tárgyalást vázoljuk föl. Didaktikai céljainknak és az osztály színvonalának megfelelő szelekcióval alakítsuk ki saját programunkat.

1. Konkrét megfeleltetések vizsgálata. Diagramok értelmezése, függvénytáblázatok kitöltése adott, illetve felismert szabály alapján.

Jobb csoportban, illetve *középiskolába készülő tanulók számára* a relációval, függvénnyel kapcsolatos fogalomrendszer áttekintése, rendszerezése.

2. Az egyenes arányosságról tanultak rendszerezése: fogalma, grafikonja, az arányossági tényező és a grafikon meredekségének kapcsolata.

3. A lineáris függvényről tanultak rendszerezése: az $x \mapsto ax + b$ esetében az a és a b értékének, valamint a függvény grafikonjának a kapcsolata (a *függvénytranszformáció* előkészítése).

Az *egyenes arányosság* és a *konstans függvény* speciális lineáris függvény.

4. *Grafikonok* olvasása, elemzése, megrajzolása. *A függvény menetének vizsgálata* a grafikon segítségével (elsősorban a lineáris függvényről tanultak alkalmazásaként). *Idő-út grafikonok.*

5. *Sorozatok* vizsgálata, szabállyal adott sorozat akárhányadik elemének meghatározása. A sorozat mint függvény. Konkrét *számtani* és *mértani sorozat* vizsgálata az általános összefüggések megkövetelésének igénye nélkül.

Emelt szinten: A számtani és a mértani sorozat fogalma, n-edik eleme, első n elemének összege. *Kamatoskamat-számítás* a mértani sorozatról tanultak alkalmazásaként. Néhány érdekes sorozat vizsgálata (például szakköri füzetek alapján).

6. Az $f(x) = |x|$; $f(x) = x^2$; $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvényekről tanultak ismétlése (ha korábban nem foglalkoztunk ezekkel a függvényekkel, akkor a csoportnak megfelelő szinten történő feldolgozása).

Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény értelmezése, grafikonja, vizsgálata.

7. *Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása*.

Alapszinten: a grafikonokról és a lineáris függvényről tanultak alkalmazásaként.

Emelt szinten: az előzőeken túlmenően a nemlineáris függvényekről és a függvények transzformációiról tanultak alkalmazásaként is.

8. *Emelt szinten:* Függvények transzformációi (a csoportnak megfelelő feldolgozásban, az általánosítás igénye nélkül).

Ez az anyagrész emelt szinten se legyen követelmény (a középiskolában részletesen foglalkoznak vele a tanulók).

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Az alaphalmaz, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet megadása a megfeleltetések, függvények értelmezése során.

Számhalmazok szemléltetése számegyenesen.

Számtan, algebra

A függvénytáblázat készítése, a függvényértékek meghatározása, a sorozat „folytatása" során a tanulók gyakorolják az *aritmetikai műveleteket*, illetve az *algebrai kifejezések helyettesítési értékének meghatározását*. A megfelelő nemlineáris függvények értelmezésével és vizsgálatával kapcsolódunk *a számok abszolútértékéről*, *négyzetéről*, *négyzetgyökéről* tanultakhoz. A függvények transzformációi vizsgálatakor fontos a *műveleti sorrend* és a *zárójel* szerepének figyelembevétele.

A mértani sorozatok valahányadik elemének, illetve első valahány eleme összegének meghatározásakor a *hatványozást* is gyakoroltathatjuk. A kamatoskamat-számítás a *százalékszámításhoz* kapcsolódik.

Az egyenlet grafikus megoldása *a lineáris és a nemlineáris egyenlet fogalmának és megoldhatóságának* megértését is elmélyíti.

A számítások elvégzése során *gyakoroltassuk a számológép használatát.*

Geometria

A geometriai függvények vizsgálata: *kerület, terület*, *geometriai fogalmak közti kapcsolatok* stb. (**Tk/5. 1.** *c)*, **2.** *b)*, **14.** *d)*, *e)*, **B20., B24.** feladat).

A függvények transzformációi és a *geometriai transzformációk* kapcsolata.

Statisztika

Mennyiségi sorok, idősorok szemléltetése oszlopdiagrammal, töröttvonal-diagrammal.

Táblázattal vagy diagrammal adott statisztikai adatsorok értelmezése.

Fizika

Hőmérséklet-változást szemléltető grafikonok vizsgálata, készítése. Halmazállapot-változások.

Idő-elmozdulás grafikonok értelmezése, készítése. A *sebesség* és a grafikon meredeksége közti kapcsolat, a sebesség nagyságának és irányának megjelenítése.

Az *erő* és a rugó megnyúlásának kapcsolata.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Hozzárendelés, függvény, szám-szám függvény

A fogalomrendszer átismétlésekor a következőket vegyük figyelembe:

- hetedik osztályban mennyi ideig tudtunk foglalkozni ezzel az anyagrésszel, mennyire sajátították el ezeket az ismereteket tanulóink;
- milyen szinten (tapasztalatgyűjtés szintjén vagy az egzakt fogalmak kialakítása szintjén) kívánjuk feldolgozni ezt az anyagrészt az adott tanulócsoportban;
- mit várnak a tanulóktól azok a középiskolák, ahová végzőseink többsége jelentkezik.

A négy mintapélda frontális feldolgozását akkor javasoljuk, ha hetedikben nem sikerült kellően megalapozni az ismereteket. Ellenkező esetben kiscsoportban vagy tanulópárokban, a tanulók önálló munkával (**Tk/5. 1–2.; Mgy. 5.01–5.03.**) is feleleveníthetik a korábban tanultakat.

Emelt szinten várjuk el, hogy a középiskolába készülő tanulók meg tudják vizsgálni a megfeleltetés egyértelműségét, legyenek képesek meghatározni azokat az elemeket, amelyeknek nem lehet képük az adott megfeleltetésben, helyesen és biztosan használják az elnevezéseket, jelöléseket. *A definíciók megtanulásának* kérdésében megoszlanak a vélemények. Úgy gondoljuk, hogy ebben a témakörben fontosabb, hogy sok-sok példával előkészítsük a fogalomalkotást, mint hogy kellő alapozás nélkül megköveteljük a definíciókat. (Programunk kialakításakor ezt a kérdést célszerű megbeszélni a középiskolákban tanító kollégákkal.) Ha nem jutunk el az egzakt fogalomalkotáshoz, akkor *a függvényt alapfogalomnak* tekintjük.

Minden középfokú iskola elvárja a tanulóktól, hogy a kifejezéssel adott egyszerű függvényekhez tudjanak táblázatot készíteni, és a táblázat segítségével tudják az összetartozó értékpárokat derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolni, a függvény grafikonját felvázolni (**4**. példa; **Tk/5. B2.; Mgy. 5.03., 5.05.** feladat). Ha a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény 3.1.01–06.** és **3.3.12–15.** feladataival (a tanulók felkészületlensége, illetve időhiány miatt) most nem tudunk foglalkozni, akkor később, például a mozgásgrafikonok és a nemlineáris függvények tárgyalásakor vagy folyamatos ismétlés keretében, házi feladatként feladhatjuk ezeket középiskolába készülő tanulóinknak.

Egyenes arányosság, lineáris függvény

A lineáris függvénnyel kapcsolatos ismeretrendszert, a lineáris függvények grafikonjának megrajzolását hetedik osztályban jól el kellett sajátítania minden tanulónak. (Az ezzel kapcsolatos szakmai és módszertani kérdésekkel a 7. osztályos program foglalkozik.) Tekintettel a témakör fontosságára, a tankönyvben ismét igen részletesen feldolgoztuk ezt az anyagrészt. Ezzel nemcsak az ismétlés oldható meg, hanem az esetleges hiányosságok pótlására is bőven jut feladat.

Itt is felhívjuk a figyelmet arra, hogy (a középiskolai tankönyvek többségével összhangban) a nulladfokú függvényt is lineáris függvénynek tekintjük, mert ennek a függvénynek a grafikonja is egyenes. Ez az értelmezés esetleg nehezebbé teheti a fogalomalkotást, de később bőven megtérül a most befektetett többletmunka.

Konkrét feladatok megoldása során tudatosíthatjuk a következőt: Mivel két ponton át pontosan egy egyenes húzható, ezért *a lineáris függvényt két összetartozó értékpárja egyértelműen meghatározza* (további pontok megadása az ellenőrzést szolgálhatja). A feladatok megoldásával arra is rávezethetjük a tanulókat, hogy az *y* tengellyel való metszéspontot és egy olyan pontot célszerű megadni, amelynek mindkét koordinátája egész szám (ha van ilyen pont). Ekkor pontosan és viszonylag kevés munkával rajzolhatjuk meg a grafikont.

A lineáris függvény fogalmát célszerű gyakorlati jellegű példákkal szemléltetni. Vizsgálhatjuk, grafikonon megjeleníthetjük például az áru mennyisége és ára közti viszonyt, egyenletes mozgás során az idő és az elmozdulás közti kapcsolatot, a hőmérséklet egyenletes csökkenését, illetve növekedését adott idő alatt stb. (**Mgy. 5.06**–**5.12.**). Ezekben a feladatokban szemléletes értelmet nyer a két változó aránya (az adott áru egységára, a sebesség, illetve az egységnyi időre eső hőmérséklet-változás).

A **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény 3.2.01–06.** feladatsorának feldolgozásával nemcsak a lineáris függvényről tanultakat mélyíthetjük el, hanem kapcsolódunk korábban tanult geometriai ismeretekhez (a geometriai transzformációkhoz), előkészíthetjük a függvénytranszformáció tanítását, és tapasztalatgyűjtés szintjén analitikus geometriai ismereteket is nyújthatunk.

Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal

Alapkövetelmény, hogy minden tanuló legyen képes változó mennyiségek közötti (egyszerű) kapcsolatot felismerni, megfigyelni, táblázatban lejegyezni. Tudjon táblázat segítségével grafikont megrajzolni, grafikonról adatokat leolvasni, összefüggéseket felismerni.

Ezért a könyvben adott mintapéldák és feladatok helyett (mellett) célszerű (esetleg a fizikában tanultakkal összhangban) kísérleteket, méréseket végrehajtatni. Például:

1. Melegített, illetve hűtött folyadék hőmérséklet-változásának megfigyelése.

2. A Mikola-csőben lévő légbuborék mozgásának megfigyelése különböző dőlésszögek esetén (példa az egyenletes mozgásra).

Ha az időmérést nem akkor kezdjük, amikor a buborék a skála nullpontjában van, akkor a mozgás nem írható le egyenes arányossággal. Például megfelelő dőlésszög esetén a buborék közeledhet is a nullponthoz.

3. Lejtőn leguruló kis autó mozgásának megfigyelése (nem egyenletes mozgás).

4. Különböző alakú edények megtöltése során annak megfigyelése, hogyan változik a vízszint.

Fontos, hogy foglalkozzunk a társtantárgyak tankönyveiben, statisztikai zsebkönyvekben, meteorológiai jelentésekben, folyóiratokban található táblázatok és grafikonok elemzésével is. Különösen érdekelheti a tanulókat a *különböző személygépkocsik, háztartási gépek működését jellemző grafikonok értelmezése* (például **Mgy. 5.30.** feladat).

A sorozat mint függvény

Ha nem túl bonyolult a szabály, akkor minden tanulótól elvárható, hogy a képlettel megadott sorozat akárhányadik elemét (mint algebrai kifejezés helyettesítési értékét) megadja. Esetleg kezdetben a jelölések helyes értelmezése és használata jelenthet gondot.

Emelt szinten hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy néhány elemével megadott sorozat (ha nincs megszorítás) végtelen sokféleképpen folytatható (**Tk/5. B03.**). A sorozatok „folytatásakor" az a feladatunk, hogy keressünk és fogalmazzunk meg minél több olyan szabályt, amely szerint az adott elemek előállíthatók, és az így felismert szabályokkal adjunk meg néhány további elemet.

A *különbségsorozat* fogalmának bevezetését nemcsak a számtani sorozat értelmezése indokolja. Jó példa erre a **2.** példában adott mértani sorozat, a bővített tankönyv 291. oldal **3.** példájának sorozata vagy a négyzetszámok sorozata (0-val kezdve), ahol a különbségsorozat a páratlan természetes számok sorozata.

Ha a számtani, illetve mértani sorozat tanítása mellett döntünk, akkor a középiskolai tárgyalást nem az általános összefüggések megtanításával készíthetjük elő, hanem azzal, hogy konkrét sorozatok minél több tulajdonságát felismertetjük.

A *számtani sorozat* esetén:

bármely két szomszédos elemének különbsége állandó;

ha a különbség 0, akkor minden eleme megegyezik, ha pozitív, akkor növekvő, ha negatív a különbség, akkor csökkenő a sorozat;

valamely eleme és a különbség ismeretében hogyan folytatható „előre" (rekurzió), illetve „visszafelé" a sorozat;

két elem ismeretében hogyan határozható meg a különbség;

a második elemtől kezdve bármely eleme a vele szomszédos két elem *számtani közepe* (ezért nevezik számtani sorozatnak);

valamely számmal osztható természetes számok is számtani sorozatot alkotnak, de azok a számok is, amelyeknek az adott számmal való osztási maradéka ugyanaz (például az ötös maradékuk 2).

A *mértani sorozat* esetén:

bármely két szomszédos elemének hányadosa állandó;

egyik eleme sem lehet 0;

ha a hányados 1, akkor minden eleme megegyezik, ha a hányados nagyobb 1-nél, akkor *növekvő*, ha 0 és 1 között van, akkor *csökkenő a sorozat*, ha a hányados negatív szám, akkor váltakozva negatívok, illetve pozitívok az elemek;

valamely eleme és a hányados ismeretében hogyan folytatható „előre", illetve „visszafelé" a sorozat;

valamely szám természetes egész kitevőjű hatványai mértani sorozatot alkotnak.

Mivel a sorozatok magasabb szintű tanítása csak a jobb képességű, középiskolába készülő vagy gimnáziumi tagozatra járó tanulók számára javasolt, ezért a feladatok többsége a feladatgyűjtemény **3.4.** fejezetébe került.

A **Fgy. 3.4.29–30.** feladat az érdeklődés felkeltését szolgálhatja. A végtelen geometriai sorokat, természetesen, nem kívánjuk tanítani. A **Fgy. 3.4.31.** feladat megoldásával megmutathatjuk, hogy a végtelen szakaszos tizedes törtek is felfoghatók mértani sorként (végtelen mértani sorozat összegeként). Azokat ugyanazzal az ötlettel írhatjuk át törtalakba, mint ahogyan a mértani sorozat elemeinek összegét meghatároztuk.

Néhány nemlineáris függvény

Az itt vizsgált függvényekkel (az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény kivételével) korábban is foglalkoztunk, és a középiskola újra foglalkozik velük. Ezért most inkább a lineáris függvény fogalmának kialakításához szükséges ellenpéldáknak tekintsük ezeket, illetve olyan példáknak, amelyekkel jól bemutatható és gyakorolható a függvény grafikonjának megrajzolása, a függvény elemi vizsgálata (növekedése, csökkenése stb.), transzformációja, illetve a nemlineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása. A felsoroltak alapján azt is látjuk, hogy elsősorban az emelt szinten tanulóink számára érdekes, hogy különböző feladathelyzetekben találkozzanak ezekkel a függvényekkel.

Ha tanulóink nem ismerik kellően az $x \mapsto |x|$ függvényt, akkor ennek a vizsgálatára is kerítsünk sort (**1.** példa). Fontos, hogy a gyerekekben ne csak a függvény grafikonjának az alakja „maradjon meg”, hanem a függvény értelmezése és vizsgálata során az abszolútérték fogalma is tudatosabbá váljon.

Az $x \mapsto x^2$ függvényt vizsgálva (**2.** példa) megmutathatjuk, hogy a függvénynek az $x = 0$ helyen *minimuma* van. Később, ha e függvény transzformáltjait is előállítjuk, *jobb csoportban* lehetőség nyílik a *monoton növekvés, monoton csökkenés, helyi minimum, helyi maximum* szemléletre támaszkodó értelmezésére, vizsgálatára, illetve a *függvény értékkészletének* grafikonról történő leolvasására.

A **3.** példa (bővített tankönyv 271–272. oldal) tanórai feldolgozását jobb csoportban feltétlenül kívánatosnak tartjuk. A megoldás és a diszkusszió során számos oktatási, nevelési feladat valósítható meg. (Ne sajnáljuk az időt!)

1. A problémának – várhatóan – két, egymástól lényegében eltérő megoldása van aszerint, hogy az *X* pont az *AD* szakaszon vagy annak meghosszabbításán van. (Geometriai szemléletfejlesztés.)
2. A számítások minden tanuló számára egyszerűek abban az esetben, amikor az *X* pont az *AD* szakaszra illeszkedik. Ekkor a hasonlóság speciális esetéről, az egybevágóságról van szó.
3. Az előzőnél érdekesebb annak az esetnek a vizsgálata, amikor az *X* pont az *AD* szakasz meghosszabbításán helyezkedik el.

A tankönyvben az arányok egyenlősége alapján felírt egyenletet (amely ekvivalens átalakításokkal másodfokú egyenlethez vezet) grafikus módszerrel oldjuk meg.

A próbálgatás segítségével való határok közé szorítás tanulságos és értékes mind a számítástechnika (számológép használata), mind a felsőbb matematika (például az analízis) szempontjából. Otthoni munkára kitűzhetjük, hogy ilyen módon négy értékes jegy pontossággal határozzák meg az *x*-et.

Érdemes megvizsgálni azt is, hogy az $x_2 \approx -3{,}236$ számérték alapján lényegében eltérő megoldást kapunk-e az $x_1 \approx 1{,}236$ esetében kapottól. Kiszámítva a kérdéses, egymáshoz hasonló téglalapok oldalait, mindkét esetben 2 cm és 3,236 cm, illetve 1,236 cm és 2 cm az eredmény. Tehát nem adódik újabb téglalapkettős.

Felhívhatjuk a tanulók figyelmét (esetleg szakköri foglalkozás keretében) arra, hogy ha $x > 0$, akkor

az $x \mapsto \frac{2}{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő,

az $x \mapsto \frac{2+x}{2}$ függvény szigorúan monoton növekvő.

Ezeknek az állításoknak az igazolása nem okozhat gondot a jobb képességű tanulóknak, mert ilyen vizsgálatokat (azonos nevezőjű, illetve azonos számlálójú törtek összehasonlítása) már 5. osztálytól végeznek. A táblázat adatait szemlélve a monotonitás szembetűnő. Folytonos változást feltételezve ez azt jelenti, hogy az adott intervallum fölött van megoldás, és csak egy megoldás van.

A lehetőségek kimeríthetetlen voltát igazolja az is, hogy a *megoldás létezését* pusztán geometriai megfontolás és szemlélet alapján is igazolhatjuk:

Legyen például $x = 2$, ez esetben az egyik alakzat négyzet, a másik egy $2 : 1$ oldalarányú t*églalap* lesz.

Ha x értékét igen kicsire, például 0,1-re változtatjuk, akkor az első alakzat egy *erősen megnyúlt téglalappá* változik, míg a második alig különbözik a *négyzetalaktól*. Folytonosságot feltételezve ez a „szerepcsere" azt is jelenti, hogy kell lennie olyan helyzetnek, amikor a két alakzat hasonló egymáshoz.

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény, illetve transzformáltjainak vizsgálata során a számok négyzetgyökének értelmezése mellett előtérbe kerül az *értelmezési tartomány* fogalma, a lehetséges legbővebb értelmezési tartomány meghatározása. E sok új mozzanat miatt a jobb képességű tanulócsoportok kivételével legfeljebb a „megmutatás" erejéig foglalkozzunk ezzel a függvénnyel.

Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ függvény mélyebb vizsgálatát csak a legjobbaktól várhatjuk el, annak ellenére, hogy a fordított arányosság fogalma minimumszinten is megkövetelhető.

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Ezt az anyagrészt a 7. osztályos emelt szintű tankönyv tartalmazza, de alapszinten valószínűleg teljesen új anyagként kell foglalkoznunk vele. A fontosságára tekintettel még akkor is alaposan ismételjük át, ha 7. osztályban elegendő időt tudtunk fordítani a feldolgozására.

Didaktikai feladatok:

1. Redukált program szerint: A lineáris függvény és az elsőfokú egyenlet kapcsolatának, illetve a lineáris egyenletek megoldhatóságának vizsgálata (tankönyv **1.** példa, **Tk/5. 15.** feladat) a lineáris egyenletekről tanultak elmélyítése céljából.

2. Egyenletes mozgással, illetve hőmérséklet-változással kapcsolatos feladatok grafikus megoldása, mintegy szemléltetésként, illetve segédeszközként az algebrai megoldáshoz (**2.** példa, **Tk/5. 17–19.** feladat).
3. *Jobb csoportban*: olyan nemlineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása, amelyeket algebrai úton legfeljebb szakkörön oldathatnánk meg (tankönyv **3.** példa, **Tk/5. 16.** feladat, feladatgyűjtemény **3.3.11.** feladat).

A grafikus megoldással előkészíthetjük a másodfokú egyenletek majdani tanítását is.

Nyilvánvaló, hogy a tárgyalás színvonalát jelentősen befolyásolja az, hogy mennyit és milyen mélységben foglalkoztunk előzőleg a nemlineáris függvények vizsgálatával.

Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy bár a grafikus megoldás esetén jól áttekinthetjük az összefüggéseket, a „pontos” megoldást általában nem kapjuk meg. (A lineáris egyenleteket, egyenlőtlenségeket oldassuk meg algebrai úton is.)

Függvények összekapcsolása

Kiegészítő anyagrész; bővített tankönyv 280–285. oldal.

A függvények transzformációval a *tapasztalatgyűjtés* szintjén foglalkozunk. Nincsenek követelmények ebből a témakörből. Ez azt jelenti, hogy a tananyag végső kialakítása a szaktanár feladata.

A középiskolai tanárok általában nem igénylik, hogy tanulóik már az általános iskolában megismerkedjenek a függvénytranszformáció alapjaival. Ugyanis fennáll annak a veszélye, hogy a tanulók a lényeg megértése nélkül mechanikusan alkalmazzák a lépéseket.

Ugyanakkor a tanulók (és a kollégák) többsége szereti ezt az anyagrészt. Ha kellő idő van rá, és tanulóink felkészültsége alapján remélhetjük, hogy nemcsak felszínes ismereteket nyújtunk, akkor olyan szinten és mélységben feldolgozhatjuk ezt az anyagrészt, amellyel nem terheljük meg tanítványainkat, ugyanakkor fejleszthetjük matematikai szemléletüket. A konkrét függvények grafikonjának táblázat segítségével történő ábrázolása (lásd az emelt szintű tankönyv kidolgozott mintapéldáit) olyan tapasztalati alapot jelenthet a tanulóknak, amelyre építve megérthetik az absztrakt, deduktív tárgyalást is.

A független változó és a függvényérték transzformációja közti különbséget az *Új függvények előállítása valós szám hozzáadásával* című rész feldolgozásakor ismerhetik föl a tanulók (a függvények különböző sorrendben történő összekapcsolása jól szemléltet). A szorzás esetében nem foglalkozunk a független változó transzformációjával.

A **Mgy. 5.21–5.22.** feladatok szemléleti alapot nyújthatnak a függvénytranszformáció fogalmának kialakításához. A **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény 3.3.** fejezete a több lépésben végrehajtható függvénytranszformációhoz szolgáltat feladatanyagot.

Gyakorló- és fejtörő feladatok. Tudáspróba

A feladatsor megoldása felkészítheti tanulóinkat a **6.** (témazáró) felmérésre. Külön felhívjuk a figyelmet a gyakorlati alkalmazás (és az országos kompetenciamérés) szempontjából fontos **Tk/5. B21., B22., 20/2–4.** feladatokra.

6. Képességpróba

Gyakorlati alkalmazások
Fejtörő feladatok (bővített tankönyv 297–298. oldal)

Ez a két alfejezet (alpontokkal együtt) hatvannál több olyan *gyakorlati jellegű feladatot* tartalmaz, amelyek megoldásához a tanulóknak „szokatlan feladathelyzetekben” kell alkalmazniuk az általános iskolában tanultakat. A feladatok mennyisége és jellege alkalmas arra, hogy a tanulók (esetleg önálló munkában) megoldva azokat, felkészüljenek az országos kompetenciamérésre. A helyes válaszokat és megoldások indoklását föltétlenül közösen beszéljük meg. Beszéljük meg azt is, hogy a *feleletválasztásos feladatok* esetén akkor is jelöljenek meg egy választ, ha nem biztosak a megoldásban. Hiszen 25%-os valószínűséggel eltalálhatják a helyes választ. Növelhető a helyes válasz eltalálásának valószínűsége, ha *kizárják a triviálisan hibás válaszlehetőségeket*.

A nemzetközi és az országos felmérésekben is sok olyan *szöveges feladat* fordul elő, amelyek megoldásához nincs szükség mélyebb matematikai ismeretekre. Ugyanakkor a magyar tanulók jelentős részénél gondot okoz a szövegben (esetenként táblázattal, grafikonnal, diagrammal, ábrával) adott információk értelmezése, és a helyes *aritmetikai modell* meghatározása. Ilyen a **Tk/6. 7., 8., 15–17., 19., 20., 26.; B1., B4., B7** feladat.

Ezekben a felmérésekben a feladatok közel fele az *arány, arányosság, százalékszámítás*, és ezekhez kapcsolódóan a *statisztikai adatsorok, diagramok* értelmezése témakörhöz tartozik. Ezért a tankönyv feladatsora is sok ilyen feladatot tartalmaz (**Tk/6. 2., 9., 11., 13., 16–22., B2.** feladat). Ezekre a feladatokra az a jellemző, hogy a tanulóknak a fent felsorolt ismereteket nagyon sokszínű problémaszituációkban kell alkalmazniuk.

A magyar tanulók többsége nehezen birkózik meg a *kombinatorikai*, illetve a *valószínűség-számítási feladatokkal*, még egyszerű feladtok esetén is (**Tk/6. 1–3., B3.** feladat). A felmérésekben többször előfordulnak nem szokványos, a **Tk/6. 4.** feladathoz hasonló komplex feladatok is. Itt az *a)* kérdés esetén észre kell venni, hogy az ötféle virág az 5 rögzített ágyásba (5! =) 120-féleképpen ültethető el. A *c)* kérdés esetén viszont az egymáshoz viszonyított sorrend számít. A terítő egy alapállásból ötféleképpen elforgatható, ezért (120 : 5 =) 24-fél sorrend lehetséges. Mivel a terítő át is fordítható, az előbbi 24 lehetőségből kettő-kettő megegyezik, a lehetőségek száma (24 : 2 =) 12. A *b)* kérdés esetén *fel kell fedezni*, hogy a nagyobb területű részbe nagyobb valószínűséggel esik az első csepp eső. Így azt kell eldönteniük, hogy az ágyások összterülete vagy a medence területe-e a nagyobb.

Az algebrai kifejezések (képletek) értelmezésének és alkalmazásának a jártasságát vizsgálják a **Tk/6. 5.** és **10.** feladatok.

A geometriai ismeretek közvetlen gyakorlati alkalmazásával oldható meg a **Tk/6. 9.** *c)*, **12., 14.** feladat, míg a **4.** *b)*, **10.** *b)*, **B5., B6.** feladatok megoldásához rejtett összefüggéseket kell felismerniük, az ismeretek *alkotó alkalmazására* van szükség. A **24.** és a **25.** feladattal *térszemlélet fejlettsége* mérhető.